Determina les coordenades dels punts següents:

a) el punt P que es troba a l'eix Z a distància 5 de l'origen en el sentit negatiu d'aquest eix
b) el punt Q que es troba en el pla XY a distància 6 de l'origen i tal que el vector OQ forma un angle de 210º amb el sentit positiu de l'eix X
c) el punt R situat en el pla XZ a distància 4 de l'origen i tal que les projeccions ortogonals del vector OR sobre els eixos X i Z siguin iguals. Hi ha més d'un punt que verifiqui aquestes condicions?

a) el punt P està sobre l'eix Z, les components x i y són 0, la component z és -5, el punt és (0,0,-5)
b) si Q està sobre el pla XY la component z=0. Les components x i y són

$$x = 6 \cos 210º = 6 \cdot \frac{-\sqrt{3}}{2} = -3\sqrt{3} \quad ; y = 6\ sin\ 210º = 6 \cdot \frac{-1}{2} = -3$$

aleshores és el punt $(-3\sqrt{3}, -3, 0)$

c) El punt R té de component y=0. Si les projeccions sobre els eixos X i Z són iguals de magnitud i signe, la tangent de l'angle que forma amb el sentit positiu de l'eix X és 1. Pot ser un angle de 45º o de 225º. Les components x i z són

$$x = z = 4\ sin\ 45º = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

i també de signe negatiu. Les possibles solucions

$(2\sqrt{2}, 0, 2\sqrt{2})$; $(-2\sqrt{2}, 0, -2\sqrt{2})$

Els components del vector v=(-2,4,3). Es demana
a) Coordenades del seu extrem B si se situa el seu origen en el punt A (4,-3,6)
b) Coordenades del seu origen C si té l'extrem en el punt D (0,4,-2)
c) Els components del vector unitari que té la mateixa direcció que el vector v i sentit contrari

a) el vector AB=(-2,4,3)=(b_1,b_2,b_3)-(4,-3,6). obtenim de coordenades de B=(2,1,9)
b) CD=(-2,4,3)=(0,4,-2)-(c_1,c_2,c_3), obtenim C=(2,0,-5)
c) el mòdul del vector és

$$|\vec{v}| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{29}$$

el vector unitari de sentit contrari serà

$$\frac{1}{\sqrt{29}}(2,-4,-3) = \left(\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{-4}{\sqrt{29}}, \frac{-3}{\sqrt{29}}\right)$$

Els punts A (3,1,-2), B (5,6,4) i C (0,4,-2) són tres vèrtexs consecutius d'un paral·lelogram. Determina el quart vèrtex D i indica raonadament de quin tipus de paral·lelogram es tracta. Calcula'n l'àrea

El quart vèrtex D podem obtenir-lo a partir de

$$D = A + \vec{B}C = (3,1,-2) + (-5,-2,-6) = (-2,-1,-8)$$

També pot fer-se

$$D = C + \vec{B}A$$

Si calculem els mòduls dels quatre vectors que defineixen els costats veurem que és igual

$$\left|\vec{A}B\right| = \sqrt{2^2 + 5^2 + 6^2} = \sqrt{65}$$

$$\left|\vec{B}C\right| = \sqrt{(-5)^2 + (-2)^2 + (-6)^2} = \sqrt{65}$$

$$\left|\vec{C}D\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-5)^2 + (-6)^2} = \sqrt{65}$$

$$\left|\vec{A}D\right| = \sqrt{(-5)^2 + (-2)^2 + (-6)^2} = \sqrt{65}$$

A més a més l'angle que formen dos vectors coincidents amb el mateix vèrtex no és rectangle, el seu producte escalar no és zero

$$\vec{AB} \bullet \vec{AD} = (2,5,6) \bullet (-5,-2,-6) = -10 - 10 - 36 \neq 0$$

Aleshores és un rombe

Les diagonals són els mòduls dels vectors definits per vèrtexs oposats

$$\left|\vec{AC}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{18}$$

$$\left|\vec{BD}\right| = \sqrt{(-7)^2 + (-7)^2 + (-12)^2} = \sqrt{242}$$

I l'àrea la meitat del producte de les diagonals

$$A = \frac{\sqrt{18}\sqrt{242}}{2} = \frac{3\sqrt{2} \cdot 11\sqrt{2}}{2} = 33$$

Donats els vector v i kv estableix la relació que hi ha entre els seus mòduls

$$\left|\vec{kv}\right| = \left|k(v_1, v_2, v_3)\right| = \left|(kv_1, kv_2.kv_3)\right| = \sqrt{k^2 v_1^2 + k^2 v_2^2 + kv_3^2} =$$

$$= \sqrt{k^2\left(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2\right)} = k\left|\vec{v}\right|$$

Si a=(1,-2,1) b=(3,0,-4) i c=(-2,5,1) són tres vectors, calcula $\vec{a} - (2\vec{b} - 3\vec{c})$, $(\vec{a} \bullet \vec{b}) \cdot c$, $\vec{a} \bullet (\vec{b} + \vec{c})$ **, l'angle format per** $\vec{a}$ **i** $\vec{b}$

$$\vec{a} - (2\vec{b} - 3\vec{c}) = (1,-2,1) - \big(2(3,0,-4) - 3(-2,5,1)\big) = (1,-2,1) - \big((6,0,-8) - (-6,15,3)\big) =$$

$$= (1,-2,1) - (12,-15,-11) = (-11,13,12)$$

$$(\vec{a} \bullet \vec{b}) \cdot c = \big((1,-2,1) \bullet (3,0,-4)\big) \cdot (-2,5,1) = -1(-2,5,1) = (2,-5,-1)$$

$$\vec{a} \bullet (\vec{b} + \vec{c}) = (1,-2,1) \bullet (1,5,-3) = 1 - 10 - 3 = -12$$

Fem servir el producte escalar

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|a| \cdot |b|} = \frac{(1,-2,1) \bullet (3,0,-4)}{\sqrt{6}\sqrt{25}} = \frac{-1}{\sqrt{150}} = -0{,}0816$$

d'on obtenim un angle de 94,68º

Considera els vectors no nuls v_1 i v_2 de V_2. Prova que el conjunt de vectors de la forma $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ és un subespai vectorial de V_2. Fes-ne la interpretació geomètrica considerant les dues possibilitats a) que v_1 i v_2 tinguin la mateixa direcció i b) que tinguin diferent direcció.

Hem de comprovar que la suma de dos vectors d'aquesta forma és també un vector d'aquesta forma

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 + k_1 v_1 + k_2 v_2 = (m_1 + k_1)v_1 + (m_2 + k_2)v_2$$

i també el producte d'un real

$$k(m_1 v_1 + m_2 v_2) = km_1 v_1 + km_2 v_2$$

Si els vectors tenen la mateixa direcció, un vector del subespai tindrà també la mateixa direcció. Els vectors estan tots sobre una mateixa recta o recta paral·lela

Si no tenen la mateixa direcció tots els vectors del subespai estan sobre un pla

Troba t perquè el vector v=(3,-4,1) sigui combinació lineal dels vectors v_1=(1,4,-2) i v_2=(5,2,t). Per a quins valors de t aquests tres vectors formen una base de V_3?

Ha de verificar que

$$(3,-4,1) = m(1,4,-2) + k(5,2,t) \Rightarrow \begin{cases} 3 = m + 5k \\ -4 = 4m + 2k \\ 1 = -2m + kt \end{cases}$$

de les dues primeres equacions obtenim

$$-4 = 4(3-5k)+2k \quad \Rightarrow -4 = 12-18k \quad \Rightarrow k = \frac{8}{9} \quad ; m = -\frac{13}{9}$$

Podem calcular el valor de t en la tercera equació

$$1 = -2\left(\frac{-13}{9}\right)+\frac{8}{9}t \quad \Rightarrow t = \frac{1-\frac{26}{9}}{\frac{8}{9}} = -\frac{17}{8}$$

Formen una base quan són linealment independents, quan $t \neq -\frac{17}{8}$

Expressa el vector v=(3,4) en combinació lineal dels vectors u_1=(1,0), u_2=(0,1) i u_3=(2,0). Té solució única el sistema que resulta? Com són entre ells els vectors u_1, u_2 i u_3? Formen una base de V_2?

Podem plantejar

$$(3,4) = (1,0)a+(0,1)b+(2,0)c \quad \Rightarrow \begin{cases} 3 = a+2c \\ 4 = b \end{cases}$$

El sistema té infinites solucions de la forma $(3-2c, b, c)$

Els vectors no són linealment independents i no formen una base

Esbrina si els vectors v_1=(3,5,-1), v_2=(1,2,-1) i v_3=(0,1,1) són base de V_3. En cas afirmatiu troba els components del vector v=(1,3,-5) en aquesta base.

Els vectors són linealment independents. La solució del sistema

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_3 v_3 = 0$$

és

$$m_1 = m_2 = m_3 = 0$$

Si volem calcular els components de v en aquesta base hem de resoldre

$$(1,3,-5) = (3,5,-1)x+(1,2,-1)y+(0,1,1)z \quad \Rightarrow \begin{cases} 1 = 3x+y \\ 3 = 5x+2y+z \\ -5 = -x-y+z \end{cases}$$

reduint z en la segona i tercera equacions obtenim

$$8 = 6x+3y$$

amb la primera

$$\begin{cases} 1 = 3x+y \\ 8 = 6x+3y \end{cases} \Rightarrow y = 6$$

aleshores

$$x = -\frac{5}{3}\,; z = -\frac{2}{3}$$

Els components del vector a en la base B={u_1,u_2,u_3} són (2,-1,3). Determina els components del vector a en la base B'={v_1,v_2,v_3} sabent que $v_1=u_1-u_3$; $v_2=-u_1+u_2+u_3$ i $v_3=2u_1+u_3$.

Aïllem u_1,u_2,u_3 en funció dels vectors v_1,v_2,v_3

$$\begin{cases} v_1 = u_1 - u_3 \\ v_2 = -u_1 + u_2 + u_3 \\ v_3 = 2u_1 + u_3 \end{cases}$$

Sumant la primera i la tercera de les equacions obtenim

$$v_1 + v_3 = 3u_1 \quad \Rightarrow u_1 = \frac{v_1 + v_3}{3}$$

Restant la tercera equació del doble de la primera

$$v_3 - 2v_1 = 3u_3 \quad \Rightarrow u_3 = \frac{-2v_1 + v_3}{3}$$

Substituint a la segona equació i aïllant u_2

$$v_2 = -\frac{v_1 + v_3}{3} + u_2 + \frac{-2v_1 + v_3}{3} \quad \Rightarrow u_2 = \frac{3v_2 + v_1 + v_3 + 2v_1 - v_3}{3} =$$

$$= \frac{3v_1 + 3v_2}{3} = v_1 + v_2$$

I el vector B serà ara, en funció de la base v_1,v_2,v_3

$$B = 2u_1 - u_2 + 3u_3 = 2\left(\frac{v_1 + v_3}{3}\right) - (v_1 + v_2) + 3\left(\frac{-2v_1 + v_3}{3}\right)$$

Operant tenim

$$B = \frac{2v_1 + 2v_3 - 3v_1 - 3v_2 - 6v_1 + 3v_3}{3} = \frac{-7v_1 - 3v_2 + 4v_3}{3} = \frac{1}{3}(-7v_1, -3v_2, 4v_3)$$

Se sap que els vector a=(1,2,-1) i b=(b_1,b_2,b_3) són perpendiculars. Si el vector b es troba situat en el pla YZ i és unitari, troba'n els components. Interpreta les solucions obtingudes

Per ser perpendiculars el seu producte escalar és zero

$$b_1 + 2b_2 - b_3 = 0$$

Si el vector b està en el pla YZ el primer component és zero

$$b_1 = 0$$

A més a més el vector b és unitari, el seu mòdul és

$$b_2^2 + b_3^2 = 1$$

on ja hem fet servir que el primer component és zero. D'aquesta última equació i de la primera podem plantejar

$$\begin{cases} b_2^2 + b_3^2 = 1 \\ 2b_2 - b_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow b_2^2 + 4b_2^2 = 1 \Rightarrow b_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$$

i

$$b_3 = 2b_2 = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$$

La solució són dos vectors oposats de components

$$\left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right); \left(0, -\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

Donats els vector v_1=(3,-4,5) i v_2=(1,2,-3) calcula la projecció ortogonal de v_2 sobre v_1

La projecció de v_2 sobre v_1 és el mòdul de v_2 pel cosinus de l'angle que formen els dos vectors
Si calculem el cosinus de l'angle aquest és

$$\cos A = \frac{3 - 8 - 15}{\sqrt{50}\sqrt{14}} = \frac{-20}{10\sqrt{7}} = \frac{-2}{\sqrt{7}}$$

El mòdul del vector v_2 l'hem fet servir, és $\sqrt{14}$
Aleshores la projecció

$$P = \frac{-2}{\sqrt{7}}\sqrt{14} = -2\sqrt{2}$$

La projecció és una distància. Hem de prendre el valor absolut $2\sqrt{2}$. El signe negatiu ens indica que l'angle format per aquests vectors supera 90º

Troba una expressió que et permeti calcular les coordenades del punt mitjà del segment d'extrems els punts A i B

El punt mitja del segment serà el punt A més la meitat del vector d'origen A i final B

$$P=(a_1,a_2,a_3)+\frac{1}{2}(b_1-a_1,b_2-a_2,b_3-a_3)=(a_1,a_2,a_3)+\left(\frac{b_1-a_1}{2},\frac{b_2-a_2}{2},\frac{b_3-a_3}{2}\right)=$$

$$\left(\frac{2a_1-b_1-a_1}{2},\frac{2a_2-b_2-a_2}{2},\frac{2a_3-b_3-a_3}{2}\right)=\left(\frac{a_1+b_1}{2},\frac{a_2+b_2}{2},\frac{a_3+b_3}{2}\right)$$

Les coordenades de dos vèrtexs consecutius d'un paral·lelogram són A=(2,3,-1) i B=(0,-4,3). Si el centre d'aquest paral·lelogram és P=(-1,2,-2), determina les coordenades dels altres dos vèrtexs i la mesura dels seus angles.

El vèrtex C, oposat a A, serà de la forma

$$C=P+\overrightarrow{AP}=(-1,2,-2)+(-3,-1,-1)=(-4,1,-3)$$

i el vèrtex D, oposat a B

$$D=P+\overrightarrow{BP}=(-1,2,-2)+(-1,6,1)=(-2,8,-1)$$

En el vèrtex A l'angle és el que formen els vectors AB i AD

$$\cos A=\frac{(-2,-7,-2)\bullet(-4,5,0)}{\sqrt{57}\sqrt{41}}=\frac{-27}{\sqrt{2337}}=-0{,}5585$$

i l'angle A=123,9º

L'angle B serà el que formen els vectors BA i BC

$$\cos B=\frac{(2,7,2)\bullet(-4,5,0)}{\sqrt{57}\sqrt{41}}=\frac{27}{\sqrt{2337}}=0{,}5585$$

i l'angle B=56º

Cové observar que els vectors AB i BA són opsats, i que el vector AD i BC són iguals. A més a més els dos angles han de sumar 180º

Troba les coordenades de divisió del segment d'extrems els punts P=(3,6,-3) i Q=(9,-6,0) en tres parts iguals

El vector PQ és (6,-12,3). La tercera part serà (2,-4,1)

Els dos punts que divideixen el segment PQ poden obtenir-se

$$A_1=P+\frac{1}{3}\overrightarrow{PQ}=(3,6,-3)+(2,-4,1)=(5,2,-2)$$

$$A_2=P+\frac{2}{3}\overrightarrow{PQ}=(3,6,-3)+2(2,-4,1)=(7,-2,-1)$$

També a partir del primer punt

$$A_2=A_1+\frac{1}{3}\overrightarrow{PQ}=(5,2,-2)+(2,-4,1)=(7,-2,-1)$$

Demostra que el baricentre d'un triangle de vèrtexs els punts A, B i C està situat en el punt G de coordenades

$$G=\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3},\frac{a_2+b_2+c_2}{3},\frac{a_3+b_3+c_3}{3}\right)$$

El punt mitjà del segment AB (un dels costats del triangle) és

$$PM_{AB}=\left(\frac{a_1+b_1}{2},\frac{a_2+b_2}{2},\frac{a_3+b_3}{2}\right)$$

El baricentre està a les 2/3 parts del segment que uneix aquest punt mitjà amb el vèrtex C

$$G=PM_{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{PM_{AB}C}$$

El vector d'origen el PM i final C és

$$\left(c_1 - \frac{a_1+b_1}{2}, c_2 - \frac{a_2+b_2}{2}, c_3 - \frac{a_3+b_3}{2}\right)$$

sumem ara 2/3 parts d'aquest vector al punt mitjà del segment AB

$$\left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}, \frac{a_3+b_3}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(c_1 - \frac{a_1+b_1}{2}, c_2 - \frac{a_2+b_2}{2}, c_3 - \frac{a_3+b_3}{2}\right) =$$

$$\left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}, \frac{a_3+b_3}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{2c_1 - a_1 - b_1}{2}, \frac{2c_2 - a_2 - b_2}{2}, \frac{2c_3 - a_3 - b_3}{2}\right) =$$

$$\left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}, \frac{a_3+b_3}{2}\right) + \left(\frac{2c_1 - a_1 - b_1}{6}, \frac{2c_2 - a_2 - b_2}{6}, \frac{2c_3 - a_3 - b_3}{6}\right) =$$

$$\left(\frac{2a_1 + 2b_1 + 2c_1}{6}, \frac{2a_2 + 2b_2 + 2c_2}{6}, \frac{2a_3 + 2b_3 + 2c_3}{6}\right)$$

i tenim

$$G = \left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3}, \frac{a_2+b_2+c_2}{3}, \frac{a_3+b_3+c_3}{3}\right)$$