Vectors en el pla

1. Busca x i y perquè es compleixin les igualtats següents

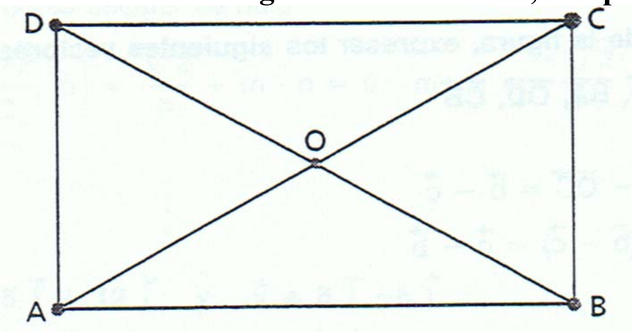
$3(x,2y)=(-1,5)$ $\qquad\qquad$ $-2(-1,y)=6(x,x-y)$

La primera és la igualtat $\begin{cases}3x=-1\\ 6y=5\end{cases}$ que té de solucions $x=-\frac{1}{3}$, $y=\frac{5}{6}$.

La segona dóna el sistema $\begin{cases}2=6x\\ -2y=6x-6y\end{cases}$

Les solucions d'aquest sistema són $x=\frac{1}{3},\quad y=\frac{1}{2}$

11. Donat el rectangle de vèrtex ABCD, completa les igualtats següents



$\vec{AB}+\vec{BC}=\boxed{?}$ $\qquad$ $\vec{AD}+\boxed{?}=\vec{AC}$

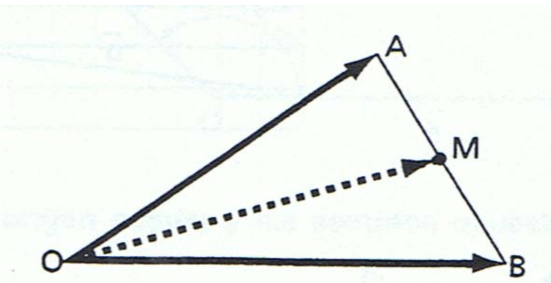
$\vec{AC}+\vec{CB}=\boxed{?}$ $\qquad$ $\vec{CB}+\boxed{?}=\vec{AB}$

$\vec{AD}+\vec{DB}=\boxed{?}$ $\qquad$ $\vec{BC}+\boxed{?}=\vec{BA}$

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BA}$

13. Sigui M el punt mitjà del segment $\overrightarrow{AB}$. Expressa el vector $\overrightarrow{OM}$ en funció del vector $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$



Sabem que $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$, aleshores $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)$

D'altra banda $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}$, fent servir la primera relació obtenim

$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$

17. Considera el vector $\vec{u}=(4,-7)$ referit a la base canònica. Troba dos vector que tinguin la mateixa direcció que i que siguin unitaris

El mòdul del vector és $m=\sqrt{4^2+(-7)^2}=\sqrt{65}$ Només cal dividir el vector per aquest mòdul

$\left(\dfrac{4}{\sqrt{65}},\dfrac{-7}{\sqrt{65}}\right)$ i $\left(\dfrac{-4}{\sqrt{65}},\dfrac{7}{\sqrt{65}}\right)$

18. Calcula el valor de m i n perquè els vectors $\vec{u}=\frac{1}{2}i+mj$, $\vec{v}=\frac{\sqrt{2}}{2}i+nj$ siguin a) unitaris b) ortogonals

Si han de ser unitaris, el seu mòdul ha de ser unitari

$$|\vec{u}|=\sqrt{\frac{1}{4}+m^2}=1 \quad \Rightarrow m^2=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4} \quad \Rightarrow m=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

el mateix amb el vector $\vec{v}$

$$1=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+n^2} \Rightarrow 1=\frac{1}{2}+n^2 \Rightarrow n=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Per fer que siguin ortogonals, el seu producte escalar ha de ser zero

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\left(\frac{1}{2},m\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2},n\right)=0 \quad \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{4}+nm=0 \quad \Rightarrow nm=-\frac{\sqrt{2}}{4}$$

19. Busca l'angle format per aquests vectors $\vec{u}=-5i+12j,\quad \vec{v}=8i-6j$

Calculem el seu producte escalar per calcular l'angle

$$(-5,12)\cdot(8,-6)=|(-5,12)||(8,-6|\cos\alpha$$

aïllem $\cos\alpha=\dfrac{-40-72}{\sqrt{5^2+12^2}\sqrt{8^2+6^2}}=-\dfrac{112}{130}=-0{,}86153$

i l'angle és de 149º29'

20. Donats els vectors $\overrightarrow{OA}=2i+j;\overrightarrow{OB}=5i+5j,\overrightarrow{OC}=-3i-j$ i $\overrightarrow{OD}=-6i-5j$, demostra que la figura ABCD és un rectangle i calcula'n el perímetre

Hem de calcular els vectors que defineixen els costats de la figura.

Podem calcular $\overrightarrow{AB}$ fent servir que

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB} \quad \Rightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=3i+4j$$

de la mateixa manera calculem

$$\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{OC} \quad \Rightarrow \overrightarrow{DC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=3i+4j=\overrightarrow{AB}$$

i també

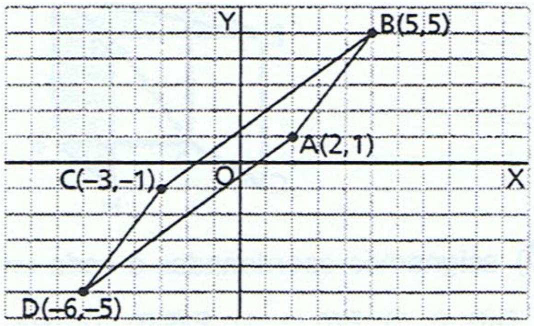
$$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC} \Rightarrow \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=-8i-6j=\overrightarrow{AD}$$

És un paral·lelogram, però no és rectangle, el producte escalar no és zero

$(3,4)\cdot(-8,-6)=-48\neq 0$

El perímetre és la suma dels quatre mòduls dels quatre vectors

$$P=2\sqrt{3^2+4^2}+2\sqrt{8^2+6^2}=2\sqrt{25}+2\sqrt{100}=30$$



21. Busca el valor de k perquè els vectors $\vec{u} = i + 2j, \quad \vec{v} = ki + \left(\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right)j$ formin un angle de 30º

Calculem el producte escalar fent servir que $\cos 30º = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{k + 2\left(\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{5}\sqrt{k^2 + \left(\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right)^2}}$$

operant amb aquesta equació obtenim

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{k + 2\sqrt{3} + 1}{\sqrt{5}\sqrt{k^2 + 3 + \sqrt{3} + \frac{1}{4}}}$$

que transformem en

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{k + 4{,}46}{\sqrt{5}\sqrt{k^2 + 4{,}98}}$$

elevant al quadrat

$$\frac{3}{4} = \frac{k^2 + 8{,}92k + 19{,}89}{5k^2 + 24{,}9}$$

ordenant obtenim l'equació de segon grau

$$15k^2 + 74{,}7 = 4k^2 + 35{,}68k + 79{,}56$$

$$11k^2 - 35{,}68k - 4{,}86 = 0$$

de solucions aproximades k=3,38 i k=-0,14

25. Donats els vectors $\vec{u} = (2,4)$ i $\vec{v} = (3,1)$, busca el mòdul del vector $\vec{u} - \vec{v}$

El vector $\vec{u} - \vec{v} = (-1,3)$, i el seu mòdul $|(-1,3)| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

26. Dos vectors $\vec{a}$ i $\vec{b}$ són tal que $|\vec{a}| = 10$, $|\vec{b}| = 10\sqrt{3}$ i $|\vec{a} + \vec{b}| = 20$. Busca l'angle que formen els dos vectors

Si apliquem el teorema del cosinus $20^2 = 10^2 + 3 \cdot 10^2 - 2 \cdot 10 \cdot 10\sqrt{3} \cos A$

d'on $\cos A = \dfrac{100 + 300 - 400}{200\sqrt{3}} = 0$

i A=90º. Són vectors ortogonals