

8 Resol els triangles següents

a=1792 m	b=4231 m	c=3164 m
a= 12 m	b= 8 m	A=150°
a=72 m	c= 57 m	C=75° 47'
c=3,78 m	A=105°	B=38° 47'
a=4 m	b=3 m	c=6 m
a=8 m	B=30°	C=105°
A=60°	B=75°	c = $\sqrt{2}$ m
a=40 cm	b= 60 cm	A=42°
a=60 cm	b=40 cm	A=42°

1

Fem servir el teorema del cosinus

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

i calculem l'angle A

$$\cos A = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc} = \frac{-1792^2 + 4231^2 + 3164^2}{2 \cdot 4231 \cdot 3164} = 0,92258$$

Aleshores $A=22^\circ 41' 36''$

Podem ara calcular l'angle B fent servir una altra vegada el teorema del cosinus

$$\cos B = \frac{-b^2 + a^2 + c^2}{2ac} = \frac{-4231^2 + 1792^2 + 3164^2}{2 \cdot 1792 \cdot 3164} = -0,41236$$

L'angle $B=114^\circ 22' 13''$. Finalment si la suma dels tres angles ha de ser 180° , l'angle $C=42^\circ 56' 11''$

2

Calculem l'angle B fent servir el teorema del sinus

$$\frac{12}{\sin 150^\circ} = \frac{8}{\sin B} \Rightarrow \sin B = \frac{8 \sin 150^\circ}{12} = \frac{1}{3}$$

L'angle $B= 19^\circ 28' 16''$. L'angle C ha de sumar 180° amb A i B i dona $C=10^\circ 31' 44''$

El costat C es pot calcular fent servir altra vegada el teorema del sinus

$$\frac{12}{\sin 150^\circ} = \frac{c}{\sin 10^\circ 31' 44''} \Rightarrow c = \frac{12 \sin 10^\circ 31' 44''}{\sin 150} = 4,38$$

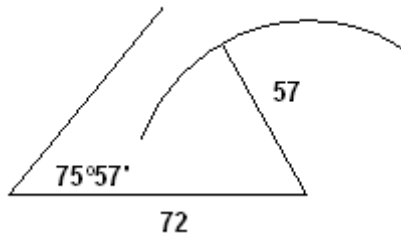
3

Calculem l'angle A fent servir el teorema del sinus

$$\frac{57}{\sin 75^\circ 47'} = \frac{72}{\sin A} \Rightarrow \sin A = \frac{72 \sin 75^\circ 47'}{57} = 1,22$$

A hauria de ser un angle amb sinus superior a 1. No és possible. EL problema no té solució. Aquest triangle no existeix

Geomètricament



4

L'angle C = $180^\circ - (105^\circ + 38^\circ 47') = 36^\circ 13'$. Fem servir el teorema dels sinus

$$\frac{3,78}{\sin 36^\circ 13'} = \frac{a}{\sin 105^\circ} \Rightarrow a = \frac{3,78 \sin 105^\circ}{\sin 36^\circ 13'} = 6,18 \text{ m}$$

i el costat b

$$b = \frac{c \sin B}{\sin C} = \frac{3,78 \sin 38^\circ 47'}{\sin 36^\circ 13'} = 4 \text{ m}$$

5

Fem servir el teorema del cosinus

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

i calculem l'angle A

$$\cos A = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc} = \frac{-4^2 + 3^2 + 6^2}{2 \cdot 3 \cdot 6} = 0,8055$$

aleshores $A = 36^\circ 20' 9''$

L'angle B

$$\cos B = \frac{-b^2 + a^2 + c^2}{2ac} = \frac{-9 + 16 + 36}{2 \cdot 4 \cdot 6} = 0,8958$$

i l'angle $B = 26^\circ 23' 3''$

$C = 180^\circ - (A + B) = 117^\circ 16' 48''$

6

L'angle A = $180^\circ - (30^\circ + 105^\circ) = 45^\circ$

Fem servir el teorema del sinus

$$\frac{8}{\sin 45^\circ} = \frac{b}{\sin 30^\circ} \Rightarrow b = \frac{8 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 4\sqrt{2} \text{ m}$$

i el costat c

$$\frac{8}{\sin 45^\circ} = \frac{c}{\sin 105^\circ} \Rightarrow c = \frac{8 \cdot 0,9659}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 10,92 \text{ m}$$

7

L'angle C = $180^\circ - (60^\circ + 75^\circ) = 45^\circ$

Fent servir el teorema del sinus

$$\frac{\sqrt{2}}{\sin 45^\circ} = \frac{a}{\sin 60^\circ} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{2} \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{3} \text{ m}$$

i el costat B

$$\frac{8}{\sin 45^\circ} = \frac{b}{\sin 75^\circ} \Rightarrow b = \frac{8 \sin 75^\circ}{\sin 45^\circ} = 10,93 \text{ m}$$

8

L'angle B serà

$$\frac{40}{\sin 42^\circ} = \frac{60}{\sin B} \Rightarrow \sin B = \frac{60 \sin 42^\circ}{40} = 1,003$$

Aleshores no té solució

9

L'angle B

$$\frac{60}{\sin 42^\circ} = \frac{40}{\sin B} \Rightarrow \sin B = \frac{40 \sin 42^\circ}{60} = 0,4461$$

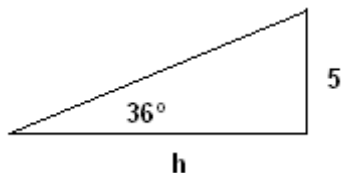
aleshores $B = 26^\circ 29' 34''$

L'angle $C = 180 - (A+B) = 111^\circ 30' 26''$ i el costat c

$$\frac{60}{\sin 42^\circ} = \frac{c}{\sin 111^\circ 30' 26''} \Rightarrow c = 83,42 \text{ m}$$

9 Busca l'àrea d'un pentàgon regular de costat 10 cm

Un angle central del pentàgon és de $\frac{360}{5} = 72^\circ$



L'altura d'un dels cinc triangles és

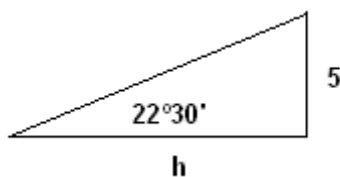
$$\tan 36^\circ = \frac{5}{h} \Rightarrow h = \frac{5}{\tan 36^\circ} = 6,88 \text{ cm}$$

i l'àrea del pentàgon

$$A = 5 \frac{10 \cdot 6,88}{2} = 172 \text{ cm}^2$$

10 Busca l'àrea d'un octàgon regular de costat 10 cm

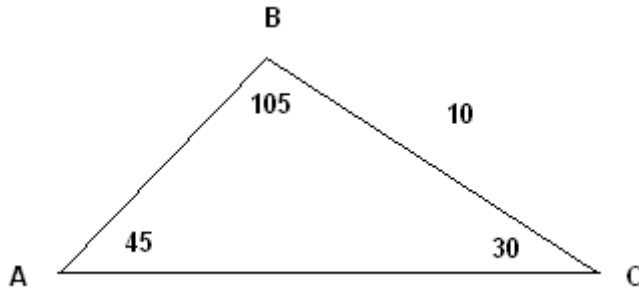
De la mateixa manera que en l'exercici anterior



$$\tan 22^{\circ}30' = \frac{5}{h} \Rightarrow h = \frac{5}{\tan 22^{\circ}30'} = 12,07 \text{ cm}$$

$$A = 8 \cdot \frac{10 \cdot 12,07}{2} = 482,8 \text{ cm}^2$$

11 En un triangle ABC coneixem el costat a= BC = 10 m l'angle ABC que val 105° i l'angle ACB que val 30°. Busca els costats i l'àrea



Podem calcular el costat AB fent servir el teorema del sinus

$$\frac{10}{\sin 45^{\circ}} = \frac{AB}{\sin 30^{\circ}} \Rightarrow \frac{10}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{AB}{\frac{1}{2}} \Rightarrow AB = \frac{10}{\sqrt{2}} = 7,07$$

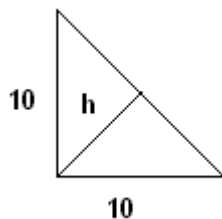
el costat AC de la mateixa manera

$$\frac{10}{\sqrt{2}} = \frac{AC}{\sin 105^{\circ}} \Rightarrow AC = \frac{10 \sin 105^{\circ}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 13,66$$

Podem calcular l'àrea aplicant la meitat del producte de dos costats pel sinus de l'angle que formen, per exemple

$$A = \frac{1}{2} 10 \cdot 7,07 \cdot \sin 105^{\circ} = 34,14$$

12 Els catets d'un triangle rectangle són iguals i mesuren 10 m cadascun. Busca l'altura sobre la hipotenusa

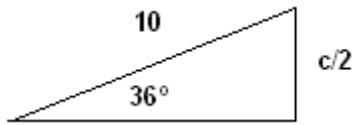


Els angles són de 45°

$$\sin 45^{\circ} = \frac{h}{10} \Rightarrow h = 10 \sin 45^{\circ} = 5\sqrt{2}$$

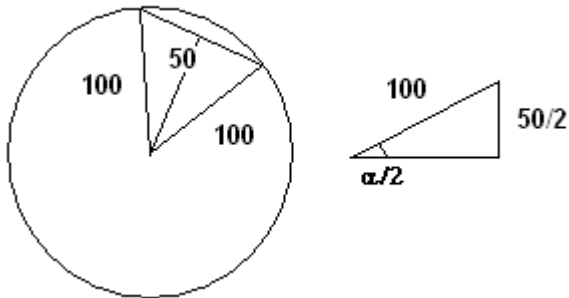
13 Calcula el costat d'un pentàgon regular inscrit en una circumferència de 10 m de radi

Un dels triangles rectangles és



$$\sin 36^\circ = \frac{c/2}{10} \Rightarrow c = 2 \cdot 10 \cdot \sin 36^\circ = 11,75 \text{ m}$$

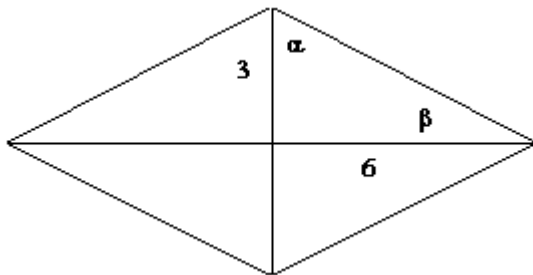
14 En una circumferència de 100 m de radi s'uneixen dos punts amb una corda de 50 m. Quant fa l'angle central?



$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 14^\circ 28' 39'' \Rightarrow \alpha = 28^\circ 57' 18''$$

19 Calcula els angles d'un rombe que té per diagonals 12 m i 6 m

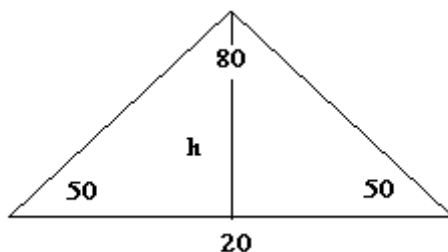
La meitat de les diagonals són 6 i 3. La tangent de les meitats dels dos angles serà



$$\tan \alpha = \frac{6}{3} = 2 \Rightarrow \alpha = 63^\circ 26' 5,8'' \Rightarrow 2\alpha = 126^\circ 52' 11''$$

$$\tan \beta = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \beta = 26^\circ 33' 54'' \Rightarrow 2\beta = 53^\circ 7' 48''$$

20 La base d'un triangle isòsceles fa 20m i l'angle oposat 80°. Calcula els costats i l'àrea del triangle.



Els altres dos angles han de ser de 50°. Plantegem

$$\cos 50^\circ = \frac{10}{c} \Rightarrow c = \frac{10}{\cos 50^\circ} = 15,56 \text{ m}$$

Els dos costats iguals fan 15,56 m. L'altura és

$$\tan 50^\circ = \frac{h}{10} \Rightarrow h = 10 \tan 50^\circ = 11,92$$

i l'àrea del triangle

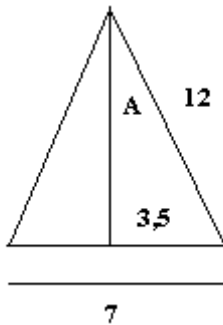
$$A = \frac{20 \cdot 11,92}{2} = 119,2 \text{ m}^2$$

21 Un estel està subjectat a terra per un fil de 100 m de llarg el qual forma amb l'horitzontal del terreny un angle de 60° . Suposant que el fil està tibet, a quina alçada es troba l'estel?

$$\sin 60^\circ = \frac{h}{100} \Rightarrow h = 100 \sin 60^\circ = 86,6 \text{ m}$$

22 Les puntes dels braços d'un compàs disten 7 cm i cada braç fa 12 cm. Busca l'angle que formen els dos braços del compàs.

Si A és la meitat de l'angle



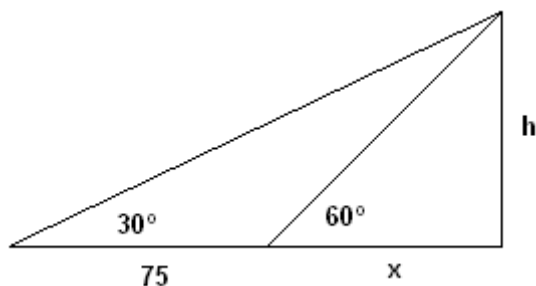
$$\sin A = \frac{3,5}{12} = 0,2917 \Rightarrow A = 16^\circ 57' 27,9''$$

i el doble serà $33^\circ 54' 55,9''$

24 Els tres cables que subjecten una torre d'una emissora de ràdio estan clavats sobre una circumferència de 100 m de radi i formen un triangle equilàter. Cada cable forma amb la horitzontal un angle de 45° . Quina és l'altura de la torre?

Si un triangle rectangle té un angle de 45° , els dos catets són iguals. L'altura de la torre és també de 100 m

26 Des d'un cert punt del terra es va el punt més alt d'una torre formant un angle de 30° amb la horitzontal. Si ens acostem 75 m cap al peu de la torre, aquest angle passa a ser de 60° . Quina és l'altura de la torre?



Plantegem, anomenat x a la distància que separa el segon punt de la base de la torre

$$\left\{ \begin{array}{l} \tan 30^\circ = \frac{h}{75+x} \\ \tan 60^\circ = \frac{h}{x} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} h = (75+x) \tan 30^\circ \\ h = x \tan 60^\circ \end{array} \right.$$

Si resollem

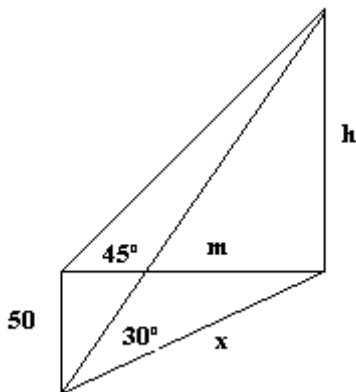
$$x \tan 60^\circ = 75 \tan 30^\circ + x \tan 30^\circ$$

$$x(\tan 60^\circ - \tan 30^\circ) = 75 \tan 30^\circ$$

$$x = \frac{75 \tan 30^\circ}{\tan 60^\circ - \tan 30^\circ} = \frac{75 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}} = 75 \cdot \frac{1}{2} = \frac{75}{2} \text{ m}$$

$$\text{i } h = x \tan 60^\circ = \frac{75\sqrt{3}}{2} \text{ m}$$

28 Un home que està situat a l'oest d'una emissora de ràdio observa que el seu angle d'elevació és de 45° . Si camina 50 m cap al sud, observa que l'angle d'elevació passa a ser de 30° . Quina és l'alçada de l'antena?



Si l'angle és de 45° , m és igual a l'altura de la torre. Des de l'angle de 30° és

$$\tan 30^\circ = \frac{h}{x}$$

i sobre el triangle rectangle

$$h^2 + 50^2 = x^2$$

si resollem el sistema format per les dues equacions, de la primera $h = x \tan 30^\circ$ que si substituïm a la segona

$$(x \tan 30^\circ)^2 + 50^2 = x^2$$

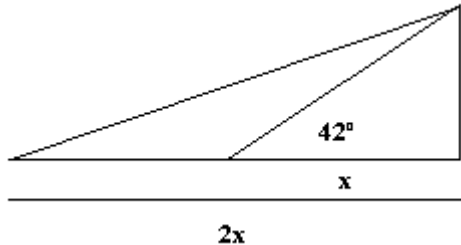
$$\frac{1}{3}x^2 + 50^2 = x^2$$

$$50^2 = \frac{2x^2}{3}$$

$$\text{d'on } x = \sqrt{\frac{3 \cdot 50^2}{2}} = 61,24 \text{ m}$$

i, finalment $h = x \tan 30^\circ = 61,24 \frac{1}{\sqrt{3}} = 35,36 \text{ m}$

29 Des d'un punt determinat del terra es veu un arbre sota un angle de 42° . Sota quin angle es veurà si ens col·loquem a una distància doble de l'anterior? I sota quin angle si la distància és triple de la primera?



$$\tan 42^\circ = \frac{h}{x}; \quad \tan A = \frac{h}{2x}$$

aïllem h a la primera i substituïm

$$\tan A = \frac{h}{2x} = \frac{x \tan 42^\circ}{2x} = \frac{\tan 42^\circ}{2}$$

d'on

$$\tan A = 0,4502 \Rightarrow A = 24^\circ 14' 14,5''$$

Si la distància és triple

$$\tan B = \frac{\tan 42^\circ}{3} = 0,3001 \Rightarrow B = 16^\circ 42' 22,7''$$

34 Busca l'àrea del triangle ABC sabent que $a = 1 \text{ m}$, $B = 30^\circ$ i $C = 45^\circ$

L'angle $A = 105^\circ$. El costat b serà

$$\frac{1}{\sin 105^\circ} = \frac{b}{\sin 30^\circ} \Rightarrow b = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 105^\circ} = 0,51 \text{ m}$$

Calculem ara l'àrea

$$A = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0,51 \cdot \sin 45^\circ = 0,18 \text{ m}^2$$

35 Busca els costats d'un triangle l'àrea del qual fa 18 m^2 i dos dels seus angles son $A = 30^\circ$ i $B = 45^\circ$

L'angle $C = 105^\circ$. Si apliquem el teorema del sinus als costats a i b

$$\frac{a}{\sin 30^\circ} = \frac{b}{\sin 45^\circ} \Rightarrow \frac{a}{1/2} = \frac{b}{\sqrt{2}/2} \Rightarrow b = a\sqrt{2}$$

tenim una relació entre els costats a i b

L'àrea és

$$A = 18 = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} a \cdot a\sqrt{2} \sin 105^\circ$$

podem aïllar els costat a

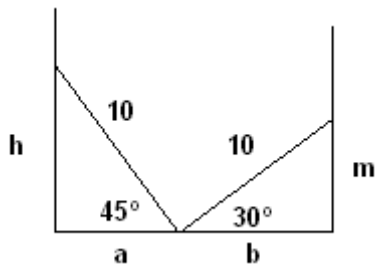
$$36 = a^2 \sqrt{2} \sin 105^\circ \Rightarrow a = \sqrt{\frac{36}{\sqrt{2} \sin 105^\circ}} = 5,13 \text{ m}$$

el costat $b = a\sqrt{2} = 5,13\sqrt{2} = 7,26 \text{ m}$

i el costat c fent servir el teorema del sinus

$$\frac{a}{\sin 30^\circ} = \frac{c}{\sin 105^\circ} \Rightarrow c = \frac{a \sin 105^\circ}{\sin 30^\circ} = 9,91 \text{ m}$$

38 Una escala de bombers de 10 m de llargada s'ha fixat sobre un punt de la calçada. Si es recolza sobre una de les façanes forma un angle amb el terra de 45° , i si es recolza sobre l'altra façana forma un angle de 30° . Quina és l'amplada del carrer? A quina altura de cada una de les façanes podem arribar amb aquesta escala?



$$\cos 45 = \frac{a}{10} \Rightarrow a = 10 \cos 45 = 7,07$$

$$\cos 30 = \frac{b}{10} \Rightarrow b = 10 \cos 30 = 8,66$$

Aleshores l'amplada del carrer és de 15,73 m

Les respectives altures són

$$\sin 45 = \frac{h}{10} \Rightarrow h = 10 \sin 45 = 7,07 \text{ m}$$

$$\sin 30 = \frac{m}{10} \Rightarrow m = 10 \sin 30 = 5 \text{ m}$$