Trigonometria

5. Expressa en radiants els angles següents, donats en graus

- **a) 0º, 30º, 45º, 60º**
- **b) 90º, 120º, 135º, 150º**
- **c) 180º, 210º, 225º, 240º**
- **d) 270º, 300º, 315º, 330º**

$0^o = 0\ rad \quad 30^o = 30\frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{6}\ rad \quad 45^o = 45\frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{4} rad \quad 60^o = 60\frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{3} rad$

$90^o = 90\frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{2}\ rad \quad 120^o = 120\frac{\pi}{180} = \frac{2\pi}{3}\ rad \quad 135^o = 135\frac{\pi}{180} = \frac{3\pi}{4} rad \quad 150^o = 150\frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{6} rad$

$180^o = 180\frac{\pi}{180} = \pi\ rad \quad 210^o = 210\frac{\pi}{180} = \frac{7\pi}{6}\ rad \quad 225^o = 225\frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{4} rad \quad 240^o = 240\frac{\pi}{180} = \frac{4\pi}{3} rad$

$270^o = 270\frac{\pi}{180} = \frac{3\pi}{2}\ rad \quad 300^o = 300\frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{3}\ rad \quad 315^o = 315\frac{\pi}{180} = \frac{7\pi}{4} rad \quad 330^o = 330\frac{\pi}{180} = \frac{11\pi}{6}\ rad$

6. Expressa en graus, minuts i segons els angles següents, donats en radiants

a) $\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$

b) $\pi, 2\pi, \frac{3\pi}{2}, \frac{9\pi}{10}, \frac{4\pi}{3}$

$\frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}\frac{180}{\pi} = 135^o, \frac{5\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}\frac{180}{\pi} = 300^o, \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}\frac{180}{\pi} = 120^o$

$\pi = \pi\frac{180}{\pi} = 180^o, 2\pi = 2\pi\frac{180}{\pi} = 360^o, \frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}\frac{180}{\pi} = 270^o,$

$\frac{9\pi}{10} = \frac{9\pi}{10}\frac{180}{\pi} = 162^o, \frac{4\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}\frac{180}{\pi} = 240^o$

11. Expressa els angles següents com un nombre enter de voltes i un angle més petit que 360º

720º 900º -3000º 7200º

720º=2 voltes i 0º
900º=2 voltes i 180º
-3000º=-8 voltes i –120º
7200º=20 voltes i 0 º

12. Expressa els angles següents com la suma d'un nombre enter de voltes i un angle més petit que 2π **radiants**

$10\pi \qquad 13\frac{\pi}{4} \qquad 20\pi \qquad 60\pi$

$10\pi = 5\ voltes$

$13\frac{\pi}{4} = 1\ volta + \frac{5\pi}{4}$

$20\pi = 10\ voltes$

$60\pi = 30\ voltes$

19. Calcula la resta de raons trigonomètriques si sabem que

$\cos\, a = \frac{4}{5}$ $\quad 270º \leq a \leq 360º$

$\sin\, a = \frac{3}{5}$ $\quad 90º \leq a \leq 180º$

$\tan\, a = \frac{3}{4}$ $\quad 180º \leq a \leq 270º$

$\cot an\; a = -2$ $\quad 90º \leq a \leq 180º$

Si $\cos\, a = \frac{4}{5}$ fem servir $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x + \frac{16}{25} = 1 \Rightarrow \sin^2 x = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$

aleshores $\sin x = \sqrt{\frac{9}{25}} = \pm\frac{3}{4}$. Com que x és un angle del 4rt quadrant, el sinus té signe negatiu i és $\sin x = -\frac{3}{4}$

Si $\sin\, a = \frac{3}{5}$ és $\cos a = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \pm\frac{4}{5}$. Aquí a és del segon quadrant i serà $\cos a = -\frac{4}{5}$

$\tan\, a = \frac{3}{4} = \frac{\sin a}{\cos a} \Rightarrow \sin a = \frac{3}{4}\cos a$. Substituint a l’equació fonamental obtenim

$$\frac{9}{16}\cos^2 a + \cos^2 a = 1 \Rightarrow \frac{25}{16}\cos^2 a = 1 \Rightarrow \cos^2 a = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos a = \sqrt{\frac{16}{25}} = \pm\frac{4}{5}$$

L’angle és del tercer quadrant, el cosinus és negatiu $\cos a = -\frac{4}{5}$

el $\sin a = \frac{3}{4}\cos a = \frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{3}{5}$

$$\cot an\; a = -2 = \frac{1}{\tan a} \Rightarrow \tan a = -\frac{1}{2} = \frac{\sin a}{\cos a} \Rightarrow \sin a = -\frac{1}{2}\cos a$$

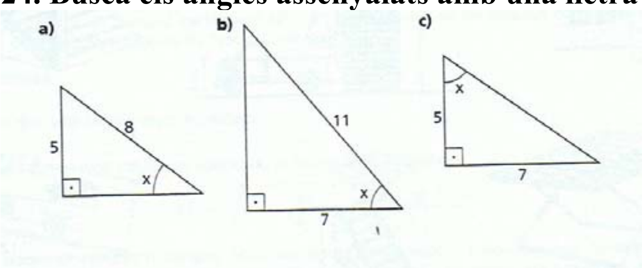
Aplicant l’equació fonamental $\frac{1}{4}\cos^2 a + \cos^2 a = 1 \Rightarrow \frac{5}{4}\cos^2 a = 1 \Rightarrow \cos^2 a = \frac{4}{5}$

d’on $\cos a = \sqrt{\frac{4}{5}} = \pm\frac{2}{\sqrt{5}} = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$

L’angle és del segon quadrant, el cosinus és negatiu $\cos a = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$ i el sinus serà

$$\sin a = -\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

24. Busca els angles assenyalats amb una lletra

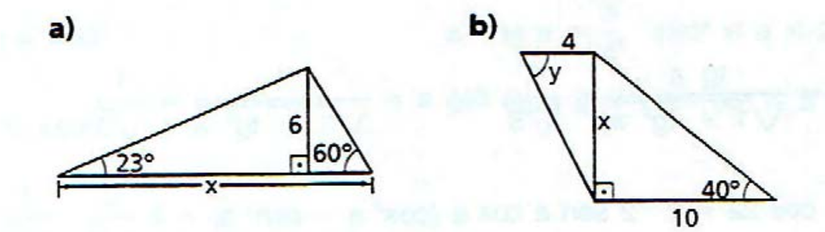


$$\sin x = \frac{5}{8} \Rightarrow x = \arcsin\frac{5}{8} = 38º40'55,8''$$

$$\cos x = \frac{7}{11} \Rightarrow x = \arccos\frac{7}{11} = 50º28'43,6''$$

$$\tan x = \frac{7}{5} \Rightarrow x = \arctan\frac{7}{5} = 54º27'44,3''$$

25. Busca les longituds i els angles assenyalats amb una lletra



Fem x igual a la suma de dos segments a i b

$$\tan 23 = \frac{6}{a} \Rightarrow a = \frac{6}{\tan 23} = 14{,}1$$

$$\tan 60 = \frac{6}{b} \Rightarrow b = \frac{6}{\tan 60} = 3{,}5$$

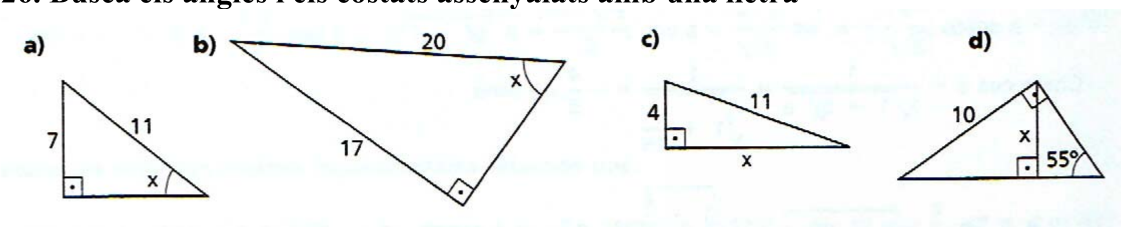
aleshores $x = a + b = 14{,}1 + 3{,}5 = 17{,}6$

Calculem primer x

$$\tan 40 = \frac{x}{10} \Rightarrow x = 10\tan 40 = 8{,}4$$

l'angle y té una tangent $\tan y = \frac{x}{4} = \frac{8{,}4}{4} = 2{,}1$, i l'angle y és 64,5º

26. Busca els angles i els costats assenyalats amb una lletra



$$x = \arcsin\frac{7}{11} = 39º31'16,3''$$

$$x = \arcsin\frac{17}{20} = 58º12'42''$$

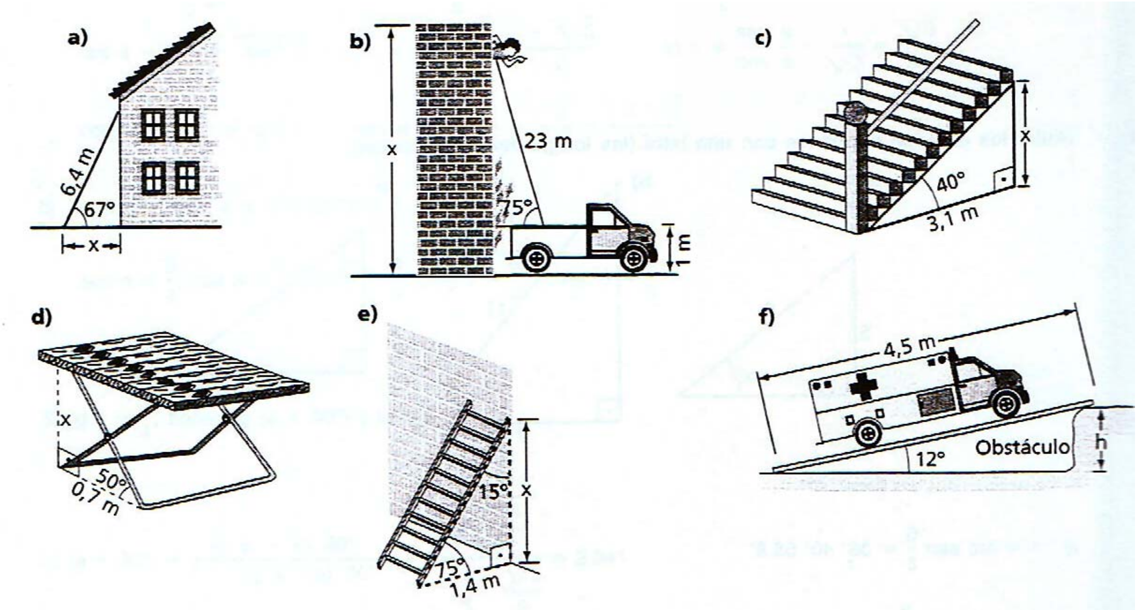
el triangle és rectangle

$$x = \sqrt{11^2 - 4^2} = 10{,}25$$

calculem el cosinus de 90º-55º=36º

$$\cos 55 = \frac{x}{10} \Rightarrow x = 10\cos 55 = 5{,}7$$

27. Busca els angles i els costats assenyalats amb una lletra



a)

$$\cos 67 = \frac{x}{6{,}4} \Rightarrow x = 6{,}4\cos 67 = 2{,}5$$

b)

$$\sin 75 = \frac{x-1}{23} \Rightarrow x - 1 = 23\sin 75 \Rightarrow x = 1 + 23\sin 75 = 23{,}22$$

c)

$$\tan 40 = \frac{x}{3{,}1} \Rightarrow x = 3{,}1\tan 40 = 2{,}6$$

d)

$$\tan 50 = \frac{x}{0{,}7} \Rightarrow x = 0{,}7\tan 50 = 0{,}83$$

e)

$$\tan 75 = \frac{x}{1{,}4} \Rightarrow x = 1{,}4\tan 75 = 5{,}22$$

f)

$$\sin 12 = \frac{h}{4{,}5} \Rightarrow h = 4{,}5\sin 12 = 0{,}94$$

28. Calcula geomètricament (sense calculadora) les raons trigonomètriques de l'angle de 45º

En un triangle rectangle isòsceles els angles iguals són de 45º i els catets són iguals. La hipotenusa és, en funció del catet c

$$h = \sqrt{c^2 + c^2} = \sqrt{2c^2} = c\sqrt{2}$$

el sinus i el cosinus de 45 són

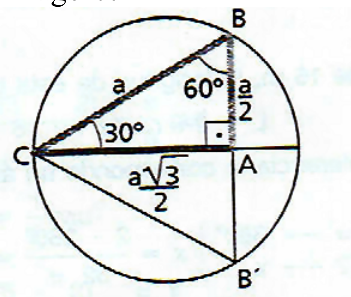
$$\sin 45 = \cos 45 = \frac{c}{c\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

i la tangent

$$\tan 45 = \frac{c}{c} = 1$$

29. Calcula geomètricament (sense calculadora) les raons trigonomètriques de l'angle de 30º. Busca les raons trigonomètriques de l'angle de 60º com a complementari de l'angle de 30º

Considerem un triangle rectangle a partir d'un equilàter de costat a. En el triangle rectangle format els angles són de 30º i de 60º , la hipotenusa és el costat a del triangle equilàter inicial, un catet és la meitat i l'altre es calcula fent servir el teorema de Pitàgores



$$x=\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{4}}=\sqrt{\frac{3a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

aleshores

$\sin 30=\frac{a/2}{a}=\frac{1}{2}$	$\cos 30=\frac{a\sqrt{3}/2}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\tan 30=\frac{a/2}{a\sqrt{3}/2}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

de la mateixa manera

$\sin 60=\frac{a\sqrt{3}/2}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos 60=\frac{a/2}{a}=\frac{1}{2}$	$\tan 60=\frac{a\sqrt{3}/2}{a/2}=\sqrt{3}$

32. En una circumferència de 16 m de radi, un arc fa 2 m. Troba els seu angle central corresponent en graus i en radiants

La longitud de la circumferència és

$L=2\pi r=2\cdot 16\cdot 3{,}14=32\pi$

i correspon a un angle de 360º, un arc de 2 m correspondrà a un angle central de

$$a=\frac{2\cdot 360}{32\pi}=7{,}1619=7º9'43''$$

33. A les 3 h les agulles d'un rellotge formen un angle recte. Al cap de quanta estona tornaran a estar en angle recte?

L'agulla de les hores té una velocitat angular de $\frac{1}{12}$ voltes/hora. L'agulla dels minuts té una velocitat de 1 volta/hora. Al cap de t hores l'agulla de les hores estarà formant un angle respecte de les 12 hores de

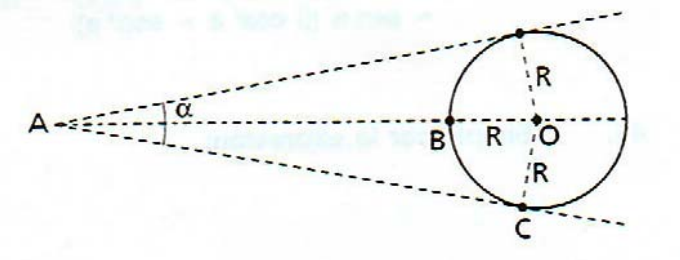
$$\frac{1}{4}+\frac{1}{12}t$$

en el mateix temps t l'agulla dels minuts avançarà fins un angle de $1\cdot t$. La diferència dels angles ha de ser de $\frac{1}{4}$ de volta

$$1\cdot t-\left(\frac{1}{4}+\frac{t}{12}\right)=\frac{1}{4}\Rightarrow t-\frac{1}{4}-\frac{t}{12}=\frac{1}{4}\Rightarrow \frac{11}{12}t=\frac{1}{2}\Rightarrow t=\frac{12}{22}=0{,}545\ hores$$

que correspon a 32 minuts i 43,6 segons

36. Des d'una nau espacial es veu la Terra formant un angle de 20º 9' 48,8''. Si saps que el radi de la Terra fa 6.366 km, a quina distància des de la superfície terrestre es troba la nau?



L'angle $\frac{\alpha}{2} = \frac{20º9'48,8''}{2}$

té de sinus

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{R}{AO} \Rightarrow AO = \frac{R}{\sin\left(\alpha/2\right)} = \frac{6366}{0,175053} = 36.366$$

Aleshores la distància a la superfície de la Terra és

$36.366 - R = 30.000\ km$

38. Demostra que $\cos^4 x - \sin^4 x - 2\cos^2 x + 1 = 0$**. sigui quin sigui el valor de x**

Sabem que $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ i $\sin^4 x = \left(1 - \cos^2 x\right)^2 = 1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x$, fent servir aquest resultat obtenim

$$\cos^4 x - \sin^4 x - 2\cos^2 x + 1 = \cos^4 x - 1 + 2\cos^2 x - \cos^4 x - 2\cos^2 x + 1 = 0$$

39. Demostra la igualtat següent

$$\frac{2\sin a}{\tan 2a} = \cos a - \frac{\sin^2 a}{\cos a}$$

$$\cos a - \frac{\sin^2 a}{\cos a} = \frac{\cos^2 a - \sin^2 a}{\cos a} = \frac{\cos 2a}{\cos a} = \frac{\frac{\sin 2a}{\tan 2a}}{\cos a} = \frac{\sin 2a}{\tan 2a \cos a} = \frac{2\sin a \cos a}{\tan 2a \cos a} =$$

$$= \frac{2\sin a}{\tan 2a}$$

43. Resol l'equació $\sin 2x = \cos x$

$\sin 2x = \cos x$

$2\sin x \cos x = \cos x$

$2\sin x \cos x - \cos x = 0$

$$\cos x(2\sin x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ 2\sin x - 1 = 0 \end{cases}$$

de la primera equació

$\cos x = 0 \Rightarrow x = 90 \pm 180k$

i de la segona

$$2\sin x = 1 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 30 \pm 360k$$

44. Resol l'equació $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1$

Fem el canvi cosx=y, $\sin x = \sqrt{1 - y^2}$ i l'equació queda

$$\sqrt{3}\sqrt{1 - y^2} + y = 1 \Rightarrow \sqrt{3 - 3y^2} = 1 - y$$

elevant al quadrat

$3-3y^2 = 1-2y+y^2 \Rightarrow 0 = 4y^2 - 2y - 2$

les solucions d'aquesta equació de segon grau són

$$y = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{8} = \frac{2 \pm 6}{8} = \begin{cases} = 1 \\ = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

la solució vàlida és y=1 d'on

$\cos x = 1 \Rightarrow x = 0 \pm 360k$

45. Resol l'equació $\sin x \cos x = \dfrac{1}{2}$

$\sin x \cos x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow$

$2\sin x \cos x = 1 \Rightarrow$

$\sin 2x = 1 \Rightarrow$

$2x = 90^{o} \Rightarrow x = 45 \pm 360^{o}$