Rectes i plans

1. Justifica la certesa o falsedat de cada una de les següents afirmacions

els plans següents Ax+By+Cz+D=0 i $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda\ (A, B, C) + \mu\ (v_1, v_2, v_3)$ són perpendiculars

la recta $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda\ (u_1, u_2, u_3)$ i el pla Ax+By+Cz+D=0 són perpendiculars si els vectors $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ i $\vec{v} = (A, B, C)$ són linealment dependents

Si $\vec{u}$ és un vector director d'una recta, $\vec{n}$ un vector associat a un pla i $\vec{u} \bullet \vec{n} = 0$, la recta i el pla són perpendiculars

Si $A \cdot B \cdot C \neq 0$ i $A \cdot B \cdot C \cdot D = 0$ el pla Ax+By+Cz+D=0 talla els eixos de coordenades només a l'origen

2. Els punts $P = (p_1, p_2, p_3), Q = (q_1, q_2, q_3)$ i $R = (r_1, r_2, r_3)$ defineixen un pla si no estan alineats. Justifica que la seva equació general es pot expressar

$$\begin{vmatrix} x - p_1 & q_1 - p_1 & r_1 - p_1 \\ y - p_2 & q_2 - p_2 & r_2 - p_2 \\ z - p_3 & q_3 - p_3 & r_3 - p_3 \end{vmatrix} = 0$$

3. Demostra que el pla d'equació Ax+By=0 conté l'eix OZ
4. Escriu l'equació canònica i general del pla que passa pels punts P=(-3,0,0) , Q=(0,4,0) i R=(0,0,-5). Indica'n dos vectors directors
5. Donades les equacions

$$\begin{cases} x = 3 + 3\lambda - 3\mu \\ y = 3\lambda + 2\mu \\ z = -2\mu \end{cases}$$

comprova que es tracta d'un pla. Troba'n els punts de tall amb els eixos de coordenades
6. Donats els punts P=(1,2,3) Q=(1,1,1) i R=(2,0,4) busca les equacions paramètriques del a recta que passa pel punt P i és perpendicular al pla que passa pels tres punts
7. Indica les condicions que han de complir en cada cas els coeficients A, B, C i D de l'equació general del pla de manera que aquest sigui paral·lel al pla determinat per 0X i 0Z, i que talli els tres semieixos de coordenades positives en punts equidistants de l'origen
8. Troba l'equació general del pla que passa pel punt P=(-4,-2,3) i conté la recta d'equació
$(x, y, z) = (1, -2, -2) + \lambda\ (2,1,2)$
9. Determina els valors de a que fan que els dos plans d'equacions
$ax + y + z - 3 = 0 \quad ; \quad (a+2)x + ay + az = 5$
siguin paral·lels
10. Troba l'equació canònica del pla que passa pel punt (-3,1,4) i és perpendicular als plans
$2x - 5y + 3z + 5 = 0 \quad ; \quad 7x - y + 3z = 21$
11. Escriu les equacions contínues de la recta que passa pel punt P=(2,-3,5) i té la mateixa direcció que la recta

$$\begin{cases} x - y + 2z + 4 = 0 \\ 2x + 3y + 6z = 12 \end{cases}$$

12. Troba l'equació general del pla que conté la recta

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 6 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

considerant que un dels vectors que determina l'orientació del pla és un vector director de la recta

$$x = \frac{2y}{-3} = 2(z+1)$$

13. Donats el pla $\pi : x + y - 2z + 1 = 0$ i la recta

$$r : \begin{cases} 4x + 3y + 2z - 4 = 0 \\ 2x - y - 4z - 12 = 0 \end{cases}$$

escriu l'equació vectorial del pla que és perpendicular al pla π i conté la recta r

14. Considera la recta r que passa pel punt de coordenades (1,1,2) i té el vector director de components (1,1,1) Considera el vector $\vec{v}$ de components (1, 1, a) i digues si per a algun valor de a existeix un pla que conté r i és perpendicular a $\vec{v}$. En cas afirmatiu escriu l'equació cartesiana del pla

1. Justifica la certesa o falsedat de cada una de les següents afirmacions

els plans següents Ax+By+Cz+D=0 i $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda\ (A, B, C) + \mu\ (v_1, v_2, v_3)$ **són perpendiculars**
la recta $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda\ (u_1, u_2, u_3)$ **i el pla Ax+By+Cz+D=0 són perpendiculars si els vectors** $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ **i** $\vec{v} = (A, B, C)$ **són linealment dependents**
Si $\vec{u}$ **és un vector director d'una recta,** $\vec{n}$ **un vector associat a un pla i** $\vec{u} \bullet \vec{n} = 0$**, la recta i el pla són perpendiculars**
Si $A \cdot B \cdot C \neq 0$ **i** $A \cdot B \cdot C \cdot D = 0$ **el pla Ax+By+Cz+D=0 talla els eixos de coordenades només a l'origen**

El primer pla té de vector perpendicular (A,B,C) i el segon pla el té de vector director. Són perpendiculars

El vector director de la recta $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ serà de la mateixa direcció que el vector perpendicular al pla (A,B,C). Han de ser de components proporcionals, és a dir, linealment dependents

El producte escalar $\vec{u} \bullet \vec{n} = 0$ ens indica que els dos vectors són perpendiculars, corresponen a un vector director de la recta i al vector associat (el vector perpendicular) al pla

Si el pla Ax+By+Cz+D=0 talla els eixos només a l'origen, la única solució és x=y=z=0. Aleshores D=0 i els coeficients A, B i C són diferents de zero

2. Els punts $P = (p_1, p_2, p_3), Q = (q_1, q_2, q_3)$ **i** $R = (r_1, r_2, r_3)$ **defineixen un pla si no estan alineats. Justifica que la seva equació general es pot expressar**

$$\begin{vmatrix} x - p_1 & q_1 - p_1 & r_1 - p_1 \\ y - p_2 & q_2 - p_2 & r_2 - p_2 \\ z - p_3 & q_3 - p_3 & r_3 - p_3 \end{vmatrix} = 0$$

Fixant el punt $P = (p_1, p_2, p_3)$ els vectors $\overrightarrow{PQ}$ i $\overrightarrow{PR}$ són vectors directors del pla. Les components dels dos vectors són el final menys l'origen i corresponen a les columnes segona i tercera del determinant. L'equació d'un punt del pla és de la forma

$$(x, y, z) = (p_1, p_2, p_3) + \lambda\ (q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3) + \mu\ (r_1 - p_1, r_2 - p_2, r_3 - p_3)$$

en forma de sistema d'equacions

$$\begin{cases} x - p_1 = (q_1 - p_1)\ \lambda + (r_1 - p_1)\ \mu \\ y - p_2 = (q_2 - p_2)\ \lambda + (r_2 - p_2)\ \mu \\ z - p_3 = (q_3 - p_3)\ \lambda + (r_3 - p_3)\ \mu \end{cases}$$

el sistema ha de ser compatible i això vol dir que el rang de la matriu ampliada no ha de ser 3. El determinant de la matriu ampliada ha de ser diferent de zero

3. Demostra que el pla d'equació Ax+By=0 conté l'eix OZ

L'eix 0Z són punts de la forma (0,0,a) on a pot ser un nombre real qualsevol. Aquests punts satisfan l'equació del pla Ax+By=0

4. Escriu l'equació canònica i general del pla que passa pels punts P=(-3,0,0) , Q=(0,4,0) i R=(0,0,-5). Indica'n dos vectors directors

Fixem el punt P i considerem els vector directors del pla $\overrightarrow{PQ} = (3,4,0)$ i $\overrightarrow{PR} = (3,0,-5)$ El pla que conte P i els dos vectors directors té d'equació

$$(x,y,z)=(-3,0,0)+\lambda\ (3,4,0)+\mu\ (3,0,-5)$$
que podem escriure
$$\begin{cases} x=-3+3\lambda+3\mu \\ y=4\lambda \\ z=-5\mu \end{cases}$$
aïllant λ i μ en la segona i tercera equació i substituint en la primera obtenim

$$x=-3+3\frac{y}{4}+3\frac{-z}{5} \quad \Rightarrow \quad 20x=-60+15y-12z \quad \Rightarrow 20x-15y+12z=60$$
Podem obtenir directament aquesta equació fent servir l'exercici 2 i calculant el determinant
$$\begin{vmatrix} x+3 & 3 & 3 \\ y & 4 & 0 \\ z & 0 & -5 \end{vmatrix}=0 \quad \Rightarrow -20x+60-12z+15y=0$$

5. Donades les equacions

$$\begin{cases} x=3+3\lambda-3\mu \\ y=3\lambda+2\mu \\ z=-2\mu \end{cases}$$
comprova que es tracta d'un pla. Troba'n els punts de tall amb els eixos de coordenades

Els vectors directors del pla són (3,3,0) i (-3,2,-2). Són linealment independents. Un punt del pla és (3,0,0).
El punt de tall amb l'eix OX són punts del tipus y=z=0. Obtenim
$$\begin{cases} 0=3\lambda+2\mu \\ 0=-2\mu \end{cases} \Rightarrow \lambda=\mu=0$$
d'on x=3

Amb l'eix OY les components x=z=0, obtenim
$$\begin{cases} 0=3+3\lambda-3\mu \\ 0=-2\mu \end{cases} \Rightarrow \mu=0 \quad ; \quad \lambda=-1$$
i el punt y és -3. El tall amb l'eix OY és (0,-3,0)

Amb l'eix OZ serà x=y=0. Resolem
$$\begin{cases} 0=3+3\lambda-3\mu \\ 0=3\lambda+2\mu \end{cases} \Rightarrow \mu=\frac{3}{5} \quad ; \quad \lambda=-\frac{2}{5}$$
i el valor de z serà
$$z=-2\mu=-\frac{6}{5}$$
el punt de tall és $(0,0,-\frac{6}{5})$
Una segona manera de resoldre el problema és a partir de l'equació general del pla
$$\begin{cases} x=3+3\lambda-3\mu \\ y=3\lambda+2\mu \\ z=-2\mu \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} x-3 & 3 & -3 \\ y & 3 & 2 \\ z & 0 & -2 \end{vmatrix} = -6x+18+6z+9z+6y = -6x+6y+15z+18=0$$

Fen x=y=0 obtindrem el punt de tall amb l'eix OZ

$$-6x+6y+15z+18=0 \quad \Rightarrow 15z+18=0 \Rightarrow z=-\frac{6}{5}$$

De la mateixa manera fent x=z=0 obtenim el tall amb l'eix OY i fent y=z=0 el tall amb l'eix OX

6. Donats els punts P=(1,2,3) Q=(1,1,1) i R=(2,0,4) busca les equacions paramètriques de la recta que passa pel punt P i és perpendicular al pla que passa pels tres punts

L'equació general del pla és

$$\begin{vmatrix} x-1 & 0 & 1 \\ y-2 & -1 & -2 \\ z-3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

on els vectors directors del pla són $\overrightarrow{PQ}$ i $\overrightarrow{PR}$

Desenvolupant el determinant obtenim l'equació

$$5x+2y-z-6=0$$

El vector perpendicular a aquest pla és (5,2,-1) i ha de ser el vector director de la recta que ens demanen. Si ha de passar per P=(1,2,3) les equacions paramètriques són

$$(x,y,z)=(1,2,3)+\lambda\ (5,2,-1)$$

$$\begin{cases} x=1+5\lambda \\ y=2+2\lambda \\ z=3-\lambda \end{cases}$$

7. Indica les condicions que han de complir en cada cas els coeficients A, B, C i D de l'equació general del pla de manera que aquest sigui paral·lel al pla determinat per 0X i 0Z, i que talli els tres semieixos de coordenades positives en punts equidistants de l'origen

El pla determinat per 0X i 0Z té de vectors directors (1,0,0) i (0,0,1). L'equació general del pla que passa per un punt de components (a,b,c) serà de la forma

$$\begin{vmatrix} x-a & 1 & 0 \\ y-b & 0 & 0 \\ z-c & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow -y+b=0$$

Aleshores l'equació del pla ha de ser A=C=0 i D=b

Els punts equidistants de l'origen a una distància a tenen de coordenades (0,0,a), (a,0,0) i (0,a,0). Prenem com vectors directors del pla a $\vec{v}=(a,0,-a)$ i $\vec{w}=(0,a,-a)$ i com punt base a (0,0,a).

L'equació del pla és

$$\begin{vmatrix} x & a & 0 \\ y & 0 & a \\ z-a & -a & -a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow a^2(z-a)+a^2x+a^2y=0 \Rightarrow a^2x+a^2y+a^2z-a^3=0$$

És a dir A=B=C=a^2 i D=$-a^3$, on a és la distància al centre de coordenades de cada un dels punts de tall amb els eixos.

8. Troba l'equació general del pla que passa pel punt P=(-4,-2,3) i conté la recta d'equació

$$(x,y,z)=(1,-2,-2)+\lambda\ (2,1,2)$$

El pla passa per (-4,-2,3) i té com un dels vectors directors el vector director de la recta (2,1,2). Un segon vector director és el definit pel punt (-4,-2,3) i un punt de la recta, per exemple (1,-2,-2), serà el segon vector director del pla $\vec{v} = (5,0,-5)$. Podem formar l'equació

$$\begin{vmatrix} x+4 & 2 & 5 \\ y+2 & 1 & 0 \\ z-3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -5(x+4)+10(y+2)-5(z-3)+10(y+2)=0 \Rightarrow$$

$$-5(x-4y+z-7)=0$$

d'on l'equació del pla és

$$x-4y+z-7=0$$

9. Determina els valors de a que fan que els dos plans d'equacions

$$ax+y+z-3=0 \quad ; \quad (a+2)x+ay+az=5$$

siguin paral·lels

Els plans són paral·lels si els coeficients són proporcionals

$$\frac{a}{a+2}=\frac{1}{a}=\frac{1}{a}$$

si resolem obtenim

$$a^2=a+2 \quad \Rightarrow a^2-a-2=0 \Rightarrow a=\begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

10. Troba l'equació canònica del pla que passa pel punt (-3,1,4) i és perpendicular als plans

$$2x-5y+3z+5=0 \quad ; \quad 7x-y+3z=21$$

El pla demanat té com vectors directors els vectors perpendiculars a cada un dels dos plans. Les seves equacions són

$$(x,y,z)=(-3,1,4)+\lambda\ (2,-5,3)+\mu\ (7,-1,3)$$

$$\begin{cases} x=-3+2\lambda+7\mu \\ y=1+-5\lambda-\mu \\ z=4+3\lambda+3\mu \end{cases}$$

podem aïllar λ i μ o desenvolupar el determinant per a calcular l'equació general

$$\begin{vmatrix} x+3 & 2 & 7 \\ y-1 & -5 & -1 \\ z-4 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

d'on obtenim

$$-3(4x-5y-11z+61)=0 \quad \Rightarrow 4x-5y-11z+61=0$$

Per formar l'equació canònica

$$\frac{x}{-4/61}+\frac{y}{5/61}+\frac{z}{11/61}=1$$

11. Escriu les equacions contínues de la recta que passa pel punt P=(2,-3,5) i té la mateixa direcció que la recta

$$\begin{cases} x-y+2z+4=0 \\ 2x+3y+6z=12 \end{cases}$$

L'equació de la recta ve donada com intersecció de dos plans. Podem formar dos plans paral·lels que passin per P=(2,-3,5) i obtenim

$$x-y+2z+D_{(2,-3,5)}=2+3+10+D=15+D=0\Rightarrow D=-15$$
$$2x+3y+6z+D_{(2,-3,5)}=4-9+30+D=25+D=0\Rightarrow D=-25$$
D'on l'equació de la recta serà
$$\begin{cases} x-y+2z-15=0 \\ 2x+3y+6z-25=0 \end{cases}$$
Si volem calcular l'equació contínua ens cal un punt i un vector director. Prenem z=0 i obtenim
$$\begin{cases} x-y=15 \\ 2x+3y=25 \end{cases}$$
de solucions x=14, y=-1. Un punt és (14,-1,0)
Un segon punt l'obtenim per a z=1
$$\begin{cases} x-y=13 \\ 2x+3y=19 \end{cases}$$
de solucions x=58/5, y=-7/5. Un segon punt (58/5,-7/5,1). Un vector director v=(-12/5,-2/5),1)=(-12,-2,5)
L'equació contínua de la recta és
$$\frac{x-2}{-12}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-5}{5}$$

12. Troba l'equació general del pla que conté la recta
$$\begin{cases} 2x+y-3z=6 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$$
considerant que un dels vectors que determina l'orientació del pla és un vector director de la recta
$$x=\frac{2y}{-3}=2(z+1)$$

Resolem el sistema de la primera recta en funció del grau de llibertat z
$$\begin{cases} 2x+y-3z=6 \\ x-2y+z=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 2x+y=6+3z \\ x-2y=-z \end{cases}$$
les incògnites x i y són
$$x=\frac{\begin{vmatrix} 6+3z & 1 \\ -z & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}=\frac{-12-6z+z}{-5}=\frac{5z+12}{5}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 6+3z \\ 1 & -z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}=\frac{-2z-6-3z}{-5}=\frac{5z+6}{5}$$
Busquem dos punts de la recta. Si z=0 el punt és $\left(\frac{12}{5},\frac{6}{5},0\right)$ i si z=1 $\left(\frac{17}{5},\frac{11}{5},1\right)$, un vector director serà $\vec{v}=(1,1,1)$
Calculem ara el vector director de la segona recta

$$x=\frac{2y}{-3}=2(z+1)\quad\Rightarrow\frac{x}{1}=\frac{y}{-\frac{3}{2}}=\frac{z+1}{\frac{1}{2}}$$

un vector director és $\vec{w}=\left(1,-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)=(2,-3,1)$

L'equació del pla ve determinada pels dos vectors calculats i un punt

$$\begin{vmatrix} x-\frac{12}{5} & 1 & 2 \\ y-\frac{6}{5} & 1 & -3 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$$

desenvolupant obtenim

$$\frac{20x+5y-25z-54}{5}=0\Rightarrow 20x+5y-25z-54=0$$

13. Donats el pla $\pi : x+y-2z+1=0$ i la recta

$$r:\begin{cases}4x+3y+2z-4=0\\2x-y-4z-12=0\end{cases}$$

escriu l'equació vectorial del pla que és perpendicular al pla π i conté la recta r

Un pla perpendicular al pla π té de vector director (1,1,-2)
Resolent el sistema compatible indeterminat format per les equacions de la recta r obtenim

$$r:\begin{cases}4x+3y+2z-4=0\\2x-y-4z-12=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4x+3y=4-2z\\2x-y=12+4z\end{cases}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}4-2z & 3\\12+4z & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}4 & 3\\2 & -1\end{vmatrix}}=\frac{-4+2z-36-12z}{-10}=z+4$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}4 & 4-2z\\2 & 12+4z\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}4 & 3\\2 & -1\end{vmatrix}}=\frac{48+16z-8+4z}{-10}=-2z-4$$

Dos punts de la recta són, fent z=0 (4,-4,0) i fent z=1 (5,-6,1) . Un vector director és w=(1,-2,1).
L'equació vectorial del pla és

$$(x,y,z)=(4,-4,0)+\lambda\ (1,-2,1)+\pi\ (1,1,-2)$$

14. Considera la recta r que passa pel punt de coordenades (1,1,2) i té el vector director de components (1,1,1) Considera el vector $\vec{v}$ de components (1, 1, a) i digues si per a algun valor de a existeix un pla que conté r i és perpendicular a $\vec{v}$. En cas afirmatiu escriu l'equació cartesiana del pla

Sigui Ax+By+Cz+D l'equació del pla, si aquest és perpendicular al vector v ha de ser

$$x+y+az+D=0$$

si conté la recta r ha de verificar que:
conté el punt de coordenades (1,1,2) i això implica que

$$1+1+2a+D=0$$

és perpendicular el seu vector normal (1,1,a) al vector director de la recta (1,1,1)

$$(1,1,a)\bullet(1,1,1)=0\Rightarrow 1+1+a=0$$

obtenim a=-2 i

$$1+1+2(-2)+D=0 \quad \Rightarrow 2-4+D=0\Rightarrow D=2$$

D=2. L'equació del pla és

$$x+y-2z+2=0$$