2 Conegudes les coordenades de l'extrem dels vectors següents, busca les coordenades del punt origen de cada un

$\overrightarrow{PQ} = (2,1); Q = (5,4)$ $\overrightarrow{MN} = (-3,2); N = (7,8)$ $\overrightarrow{RS} = (0,-7); S = (4,-1)$

El punt P=(x,y) ha de verificar que

$\overrightarrow{PQ} = (2,1) = Q - P = (5,4) - (x,y)$

$\Rightarrow \begin{cases} 2 = 5 - x \\ 1 = 4 - y \end{cases}$

aleshores P=(3,3)

D'una manera semblant M(10,6) i R(4,6)

3 Conegudes les coordenades de l'origen dels vectors següents, busca les coordenades del punt extrem de cada un

$\overrightarrow{AB} = (3,2); A = (5,7)$ $\overrightarrow{CD} = (-1,4); C = (-1,3)$ $\overrightarrow{EF} = (4,-2); E = (2,-6)$

El punt B=(x,y) ha de verificar

$\overrightarrow{AB} = (3,2) = B - A = (x,y) - (5,7)$

$\Rightarrow \begin{cases} 3 = x - 5 \\ 2 = y - 7 \end{cases}$

d'on resulta B=(8,9)

Igualment D=(-2,7) i F=(6,-8)

5 Busca totes les equacions possibles de la recta r que passa pel punt A(3,5) i porta la direcció del vector v=(2,-4)

L'equació vectorial és

$(x,y) = (3,5) + k(2,-4)$

l'equació paramètrica

$\begin{cases} x = 3 + 2k \\ y = 5 - 4k \end{cases}$

la contínua

$\frac{x-3}{2} = \frac{y-5}{-4}$

que podem simplificar a $x - 3 = \frac{y-5}{-2}$

L'equació general serà

$-2x + 6 = y - 5 \quad \Rightarrow -2x - y + 11 = 0 \quad \Rightarrow 2x + y - 11 = 0$

i l'equació explícita

$y = -2x + 11$

6 Busca totes les equacions possibles de la recta que passa pels punts A(3,2) i B(1,-4)

En primer lloc ens cal el vector director de la recta $\overrightarrow{AB} = (-2,-6) = (1,3)$, on hem simplificat el vector. Podem considerar ara un dels dos punts, per exemple A.

Les equacions són

$(x,y) = (3,2) + k(1,3)$

$$\begin{cases} x = 3 + k \\ y = 2 + 3k \end{cases}$$

$x - 3 = \dfrac{y-2}{3}$

$3x - 9 = y - 2 \quad \Rightarrow 3x - y - 7 = 0$

$y = 3x - 7$

9 Determina si els punts A(3,1), B(5,2) i C(1,0) estan alineats

Calculem l'equació de la recta AB

$\overrightarrow{AB} = (2,1) \quad \Rightarrow \dfrac{x-3}{2} = y - 1$

mirem ara si el punt C(1,0) verifica aquesta equació

$\dfrac{1-3}{2} = -1$

Donat que l'equació es verifica, els tres punts estan en la mateixa recta.
Una segona manera de fer l'exercici és calcular el vector

$\overrightarrow{AC} = (-2,-1)$

i observar que els vectors $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ són proporcionals, és a dir

$k\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$

10 Calcula l'equació de la recta que passa pel punt $A\left(-2,\dfrac{1}{3}\right)$ i té el mateix pendent que la recta que passa pels punts P(2,1) i Q(3,4)

El pendent de la recta que passa per PQ és

$\overrightarrow{PQ} = (1,3) \quad \Rightarrow a = 3$

Una recta que tingui el mateix pendent ha de ser de la forma $y = 3x + b$. Calculem b si volem que passi per $A\left(-2,\dfrac{1}{3}\right)$

$\dfrac{1}{3} = 3\cdot(-2) + b \quad \Rightarrow b = \dfrac{1}{3} + 6 = \dfrac{19}{3}$

I l'equació de la recta és

$y = 3x + \dfrac{19}{3}$

12 Calcula l'equació de la recta que passa pel punt A(2,1) i forma un angle de 120º amb la part positiva de l'eix OX

La tangent de l'angle dóna el pendent de la recta. La recta té pendent

$a = \tan 120 = -\sqrt{3}$

L'equació és de la forma $y = -\sqrt{3}x + b$. Calculem b si sabem que passa per (2,1)

$1 = -2\sqrt{3} + b \quad \Rightarrow b = 1 - 2\sqrt{3}$

i l'equació és

$y = -\sqrt{3}x + 1 + 2\sqrt{3}$

13 Donada la recta 5x-3y+7=0, busca la longitud dels extrems que determina sobre els eixos

Calculem els punts de tall amb els eixos. Amb l'eix OX és quan y=0

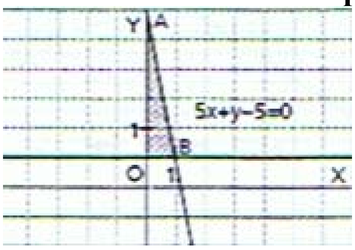
$5x + 7 = 0 \quad \Rightarrow x = -\frac{7}{5} \quad \Rightarrow \left(0,-\frac{7}{5}\right)$

i quan x=0

$-3y + 7 = 0 \quad \Rightarrow y = \frac{7}{3} \quad \Rightarrow \left(\frac{7}{3},0\right)$

Si aquests són els punts de tall amb els eixos, els segments que determina amb ells tenen longituds de $\frac{7}{5}$ i $\frac{7}{3}$

14 Busca l'àrea limitada per la recta 5x+y-5=0, l'eix d'abscisses i l'eix d'ordenades



Com en l'exercici anterior, calculem els punts de tall amb els eixos

Si y=0

$5x - 5 = 0 \quad \Rightarrow x = 1 \quad \Rightarrow (1,0)$

Si x=0

$y - 5 = 0 \quad \Rightarrow y = 5 \quad \Rightarrow (0,5)$

Forma un triangle de base 1 i altura 5. La seva superfície és $\frac{5}{2}$

15 Calcula l'equació de la recta que passa pel punt P(0,4), sabent que la tangent de l'angle que forma amb l'eix d'abscisses és 2

La tangent de l'angle és el pendent de la recta. Si el pendent és 2 l'equació de la recta és de la forma $y = 2x + b$. Calculem el valor de b demanant que passi per (0,4) i obtenim b=4. L'equació és $y = 2x + 4$

27 Donat el segment d'extrems A(3,5) i B(6,15) calcula les coordenades dels punts C, D i E que divideixen el segment AB en quatre parts iguals

El vector $\overrightarrow{AB}$ és (3,10). Si el dividim en 4 parts obtenim el vector

$\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}(3,10) = \left(\frac{3}{4},\frac{5}{2}\right)$

El punt C serà

$C = A + \left(\frac{3}{4},\frac{5}{2}\right) = (3,5) + \left(\frac{3}{4},\frac{5}{2}\right) = \left(\frac{15}{4},\frac{15}{2}\right)$

El punt D

$D = A + 2\left(\frac{3}{4},\frac{5}{2}\right) = (3,5) + \left(\frac{6}{4},\frac{10}{2}\right) = \left(\frac{18}{4},\frac{20}{2}\right)$

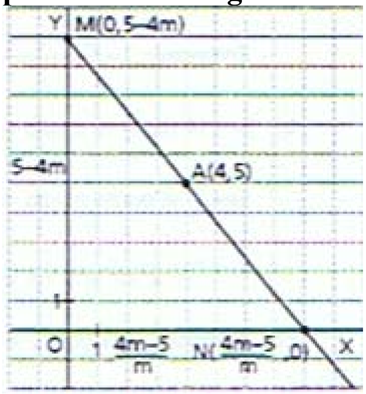
De la mateixa manera

$E=\left(\frac{21}{4},\frac{25}{2}\right)$

Si al punt E afegim de nou el vector $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{4}(3,10)=\left(\frac{3}{4},\frac{5}{2}\right)$ ha de donar el punt B

$\left(\frac{21}{4},\frac{25}{2}\right)+\left(\frac{3}{4},\frac{5}{2}\right)=\left(\frac{24}{4},\frac{30}{2}\right)=(6,15)=B$

32 Busca l'equació d'una recta que passa pel punt A(4,5) i forma amb els semieixos positius un triangle d'àrea 40 unitats quadrades



L'equació del feix de rectes que passen per A(4,5) és de la forma

$y-5=m(x-4)$

depenent del pendent m. Els talls amb els eixos són els punts

$x=0\Rightarrow y=5-4m \quad \Rightarrow (0,5-4m)$

$y=0\Rightarrow -5=mx-4m\Rightarrow x=\frac{4m-5}{m}\Rightarrow\left(\frac{4m-5}{m},0\right)$

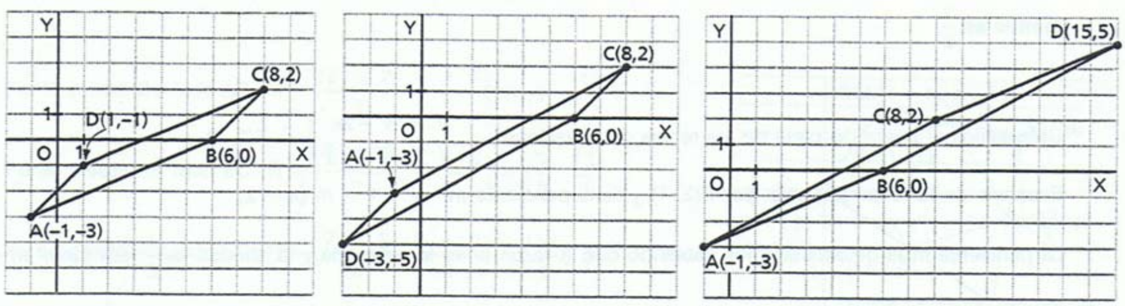
Que són, respectivament, l'altura i la base del triangle rectangle. Si l'àrea ha de ser de 40 unitats

$40=\frac{1}{2}\cdot(5-4m)\left(\frac{4m-5}{m}\right)\Rightarrow 80m=-25+40m-16m^2\Rightarrow 16m^2+40m+25=0$

La solució d'aquesta equació de segon grau és $m=-\frac{5}{4}$ i aquest és el pendent de la recta. L'equació serà

$y-5=-\frac{5}{4}(x-4)\Rightarrow 5x+4y-40=0$

33 Un paral·lelogram té per vèrtexs (-1,-3), (6,0) i (8,2). Determina el quart vèrtex sabent que hi ha tres solucions



$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = (-1, -3) + (2, 2) = (1, -1)$; D(1, −1)

$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{CB} = (-1, -3) + (-2, -2) = (-3, -5)$; D(−3, −5)

$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AC} = (6, 0) + (9, 5) = (15, 5)$; D(15, 5)

35 La recta y+2=m(x+3) passa pel punt d'intersecció de les rectes 2x+3y+5=0 i 5x-2y-16=0 . Calcula m

Calculem el punt d'intersecció de les rectes resolent el sistema

$$\begin{cases} 2x+3y=-5 \\ 5x-2y=16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x+6y=-10 \\ 15x-6y=48 \end{cases} \Rightarrow 19x=38 \Rightarrow x=2;\ y=-3$$

Les rectes es tallen en el punt (2,-3). Calculem ara el valor de m que fa que la primera recta passi per aquest punt

$$-3+2=m(2+3) \Rightarrow -1=5m \Rightarrow m=-\frac{1}{5}$$

L'equació de la recta és

$$y+2=-\frac{1}{5}(x+3)$$

43 Una empresa de lloguer de cotxes ofereix dos contractes diferents: A.- 50€/dia i quilometratge il·limitat B.- 10€/dia i 0,10€ per quilòmetre. Un turista vol fer un viatge de 10 dies però no sap exactament quants quilòmetres ha de recórrer. Determina quin dels dos contractes li sortirà més econòmic en funció dels quilòmetres recorreguts i calcula quants quilòmetres ha de recórrer perquè els dos contractes li resultin igual d'econòmics

El contracte A, si x són els quilòmetres i d són els dies, és

$$p=50d$$

i el contracte B

$$p=10d+0{,}1x$$

Si el viatge és de 10 dies, el primer dels contractes és

$$p=50.10=500$$

i el segon

$$p=10.10+0{,}1x=100+0{,}1x$$

Pagarà el mateix quan

$$500=100+0{,}1x \Rightarrow 400=0{,}1x \Rightarrow x=4000$$

És a dir, si fa 4.000 quilòmetres en els 10 dies. Si fa més de 4.000 li convé el contracte A, si fa menys de 4.000 el contracte B