Probabilitat 3

1. **En una família de quatre fills, què és més probable: que tots siguin nenes, que hi hagi tres nens i una nena, o bé, que hi hagi dos nens i dues nenes. Imagineu esdeveniments independents i amb probabilitat 0,5**

La probabilitat de tot nenes

$$P = \binom{4}{4} = 0{,}5^4 = 0{,}0625$$

La probabilitat de tres nens i una nena és

$$P = \binom{4}{3} = 4 \cdot 0{,}5^3 0{,}5 = 0{,}25$$

La de dos nens i dues nenes

$$P = \binom{4}{2} = 6 \cdot 0{,}5^2 0{,}5^2 = 0{,}375$$

Comprovem els resultats: Per simetria la probabilitat de tres nens i una nena és la mateixa que tres nenes i un nen, i la de tot nenes la mateixa que tot nens

nens	nenes	probabilitat
0	4	0,0625
1	3	0,2500
2	2	0,3750
3	1	0.2500
4	0	0,0625
		1,0000

2. **La probabilitat que un alumne aprovi una assignatura A és 0,6, que aprovi l'assignatura B és 0,5, de que aprovi les dues 0,2. Determineu la probabilitat de a) aprovar almenys una, b) no aprovar-ne cap, c) aprovar A però no B, d) aprovar B però no A.**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}6 + 0{,}5 - 0{,}2 = 0{,}9$$

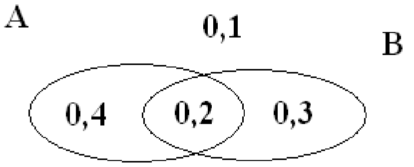
La probabilitat d'aprovar almenys una és $P(A \cup B) = 0{,}9$

No aprovar-ne cap $1 - P(A \cup B) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$

Aprovar A però no B $P(A) - P(A \cap B) = 0{,}6 - 0{,}2 = 0{,}4$

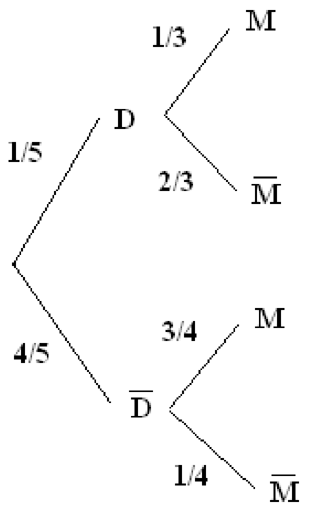
Aprovar B però no A $P(B) - P(A \cap B) = 0{,}5 - 0{,}2 = 0{,}3$

Podem representar aquestes probabilitats sobre l'esquema



3. **El germà d'un amic meu es deixa l'esmorzar a casa amb probabilitat 1/5. Tot i així, si se l'emporta, la probabilitat de que oblidi menjar-se'l és 1/4. Per sort la mare li porta l'esmorzar a l'escola a l'hora del pati sempre que s'adona que se l'ha deixat (això passa una de cada tres vegades) i s'assegura que el mengi. Probabilitat de que es mengi l'esmorzar. Probabilitat de que se l'hagi emportat sabent que se l'ha menjat. Comproveu la dependència dels esdeveniments "emportar-se l'esmorzar" i "menjar-se l'esmorzar"**

Sigui D l'esdeveniment "deixar-se l'esmorzar" i M "menjar-se l'esmorzar". L'esquema de la situació és



Es menja l'esmorzar

$$P(M) = P(M/D)\cdot P(D) + P(M/\overline{D})\cdot P(\overline{D}) =$$
$$\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}+\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$$

Se l'hagi emportat sabent que se l'ha menjat

$$P(\overline{D}/M) = \frac{P(M/\overline{D})\cdot P(\overline{D})}{P(M)} =$$
$$\frac{\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{2}{3}} = \frac{9}{10}$$

Les probabilitats de $P(\overline{D}) = \frac{4}{5}$, $P(M) = \frac{2}{3}$, $P(\overline{D}\cap M) = \frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{5}$, són, respectivament, les d'emportar-se l'esmorzar, menjar-se'l i emportar-se'l i menjar-se'l. Es compleix que $\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\neq\frac{3}{5}$ i no són independents

4. **(Ruleta del desert) Dins d'una sac hi ha 18 serps d'una certa espècie, 32 d'una altra i 10 d'una tercera. Totes són verinoses, però perquè resultin mortals cal ser picat per dues serps de la mateixa espècie. Per problemes d'estrès imaginem que una serp no pica dues vegades seguides. Posem la mà dins del sac i ens piquen dues serps. Probabilitat de morir.**

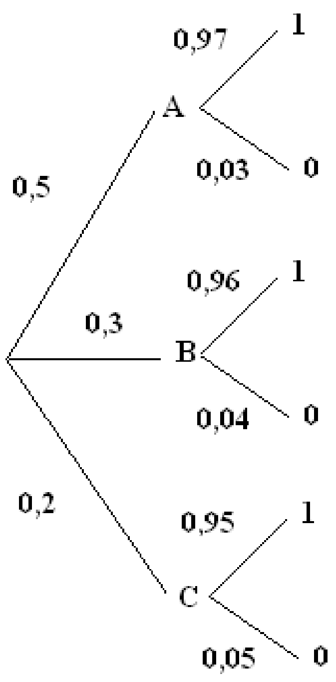
Siguin A, B i C les tres espècies de serps. Per morir ens han de picar dues serps de la mateixa espècie

$$P = P(A_1)P(A_2) + P(B_1)P(B_2) + P(C_1)P(C_2) =$$

$$\frac{18}{60}\cdot\frac{17}{59}+\frac{32}{60}\cdot\frac{31}{59}+\frac{10}{60}\cdot\frac{9}{59}=\frac{1388}{3540}=0{,}392$$

5. **Tres amics, Alexandre, Brauli i Claudi es reuneixen per fer una col·lecció de problemes de probabilitat (que ja són ganes..). Alexandre és el més ràpid, fa el 50%, Brauli el 30% i Claudi el 20%. Alexandre s'equivoca en el 3% dels problemes que fa, Brauli en el 4% i Claudi en el 5%. S'escull un problema a l'atzar de tots els que han fet. Calculeu la probabilitat que estigui mal fet. Si està mal fet, probabilitat que l'hagi fet l'Alexandre**

A, B i C són els tres amics i 1 i 0 fer bé o malament un problema. L'esquema de la situació és



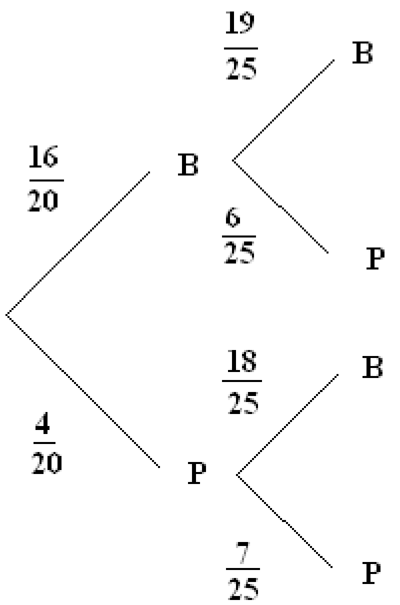
$$P(0) = P(A)P(0/A) + P(B)P(0/B) + P(C)P(0/C) =$$
$$0{,}5\cdot 0{,}03 + 0{,}3\cdot 0{,}04 + 0{,}2\cdot 0{,}05 = 0{,}037$$

Si està mal fet, la probabilitat que l'hagi fet A és

$$P(A/0) = \frac{P(0/A)\cdot P(A)}{P(0)} =$$
$$\frac{0{,}5\cdot 0{,}03}{0{,}037} = \frac{15}{37} = 0{,}4054$$

6. **D'un cistell, en el qual hi ha 20 figues, 4 d'elles podrides, en cau una dins d'altre cistell on hi havia 6 figues podrides i 18 de bones. Si ara traiem una a l'atzar del segon cistell, probabilitat que sigui podrida. Si no està podrida, quina probabilitat tenim que la figa que havia caigut del primer cistell fos bona?**

La situació és



B i P són els esdeveniments caure o treure una figa bona o podrida.

Pensem que la figa que cau al segon cistell fa augmentar el nombre de figues que hi ha en aquest cistell, a més a més, segons sigui bona o podrida, canvien les probabilitats de treure del segon cistell una figa d'un tipus o altre

La probabilitat de treure una figa podrida del segon cistell és

$$P(P) = P(B_1)\cdot P(P/B_1) + P(P_1)\cdot P(P/P_1) = \frac{16}{20}\cdot\frac{6}{25} + \frac{4}{20}\cdot\frac{7}{25} = \frac{124}{500} = 0{,}248$$

I la de treure una figa bona del segon cistell $1 - \frac{124}{500} = 0{,}752$

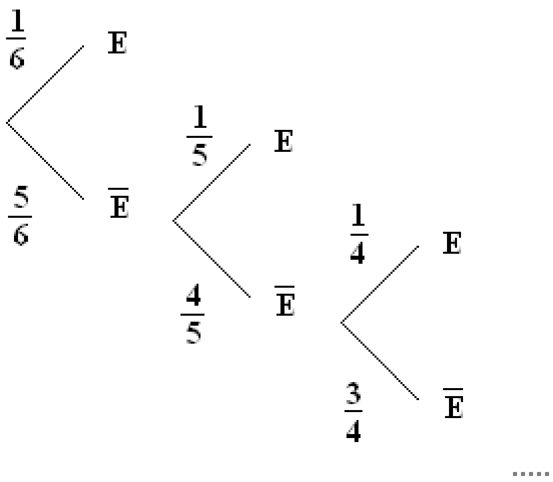
En el cas de treure una figa bona, la probabilitat d'haver passat una figa bona del primer al segon cistell és

$$P(B_1/B) = \frac{P(B_1)\cdot P(B/B_1)}{P(B)} = \frac{\frac{16}{20}\cdot\frac{19}{25}}{0{,}752} = \frac{304}{376} = 0{,}8085$$

El subíndex indica el primer cistell

7. Un borratxo torna a cas prou serè per a no provar dues vegades la mateixa clau de les sis que porta, però no per a recordar quina és la bona. Probabilitat que no li calgui el quart intent per entrar a casa

Podem representa la situació de la següent manera, on E és l'esdeveniment entrar a casa



La probabilitat d’entrar a la primera

$$P(E_1) = \frac{1}{6}$$

entrar a la segona

$$P(E_2) = P(\overline{E_1}) \cdot P(E_2 / \overline{E_1}) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{6}$$

on no ha d’entrar a la primera i sí a la segona

En les altres situacions les probabilitats són iguals

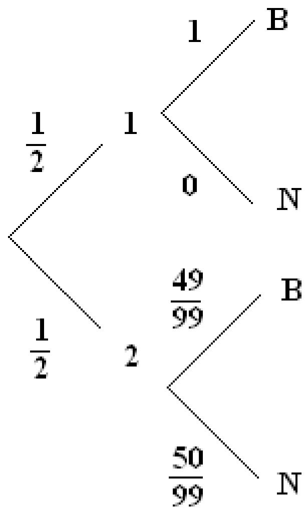
$$P(E_3) = P(E_4) = ... = \frac{1}{6}$$

Li caldrà el quart intent quan falli el primer, el segon i el tercer

$$P = \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$$

8. Els condemnats a mort en el reialme de Pocatraça podien salvar-se si treien bola blanca en el següent joc: En cada una de dues bosses hi havia 25 boles blanques i 25 de negres. Escollien una bossa a l'atzar i treien una bola. Una vegada un condemnat (que havia aprovat les matemàtiques de batxillerat) va demanar distribuir les 100 boles d'una altra manera. Va posar una bola blanca en una de les bosses i les 99 restants en l'altra. Mereixia aprovar les matemàtiques de batxillerat?

En la primera distribució, la probabilitat de treure una bola blanca és $\frac{1}{2}$. En la segona situació tenim



Les probabilitats d'agafar la primera o la segona de les bosses són les mateixes. Si agafem la primera bossa tenim probabilitat 1 de treure una bola blanca (ja que només hi ha una bola d'aquest color). Si seleccionem la segona bossa, on hi ha les 99 boles restants, les probabilitats són, respectivament, de $\frac{49}{99}$ i $\frac{50}{99}$

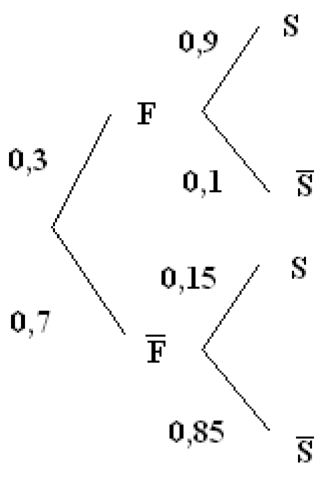
Podem treure bola blanca amb probabilitat

$$P(B) = P(1) \cdot P(B/1) + P(2) \cdot P(B/2) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{49}{99} = \frac{148}{198} = 0{,}747$$

que augmenta significativament la probabilitat anterior de 0,5

9. **Un popular davanter d'un encara més popular equip de futbol està en fora de joc el 30% de les vegades que rep una pilota. L'àrbitre senyala el 90% dels fores de joc i senyala com fora de joc el 15% de les vegades que no hi està. S'ha xiulat un fora de joc al davanter. Quina és la probabilitat que no estigui en fora de joc.**

Considerem les situacions F "estar en fora de joc" i S "senyalar fora de joc". La distribució és:



$$P(\overline{F}/S) = \frac{P(S/\overline{F})P(\overline{F})}{P(S)} =$$

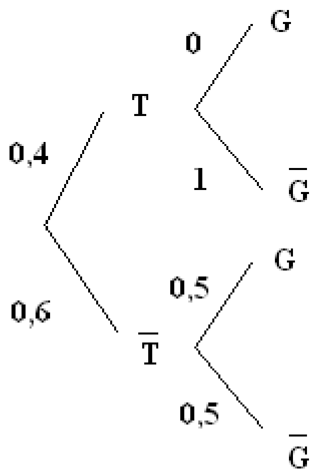
$$= \frac{0{,}7 \cdot 0{,}15}{0{,}3 \cdot 0{,}9 + 0{,}7 \cdot 0{,}15} = \frac{0{,}105}{0{,}27 + 0{,}105} =$$

$$= \frac{0{,}105}{0{,}375} = 0{,}28$$

10. **El 40% dels jugadors de poker fan trampes. Si un jugador fa trampes guanya sempre. El bo de la pel·lícula és tan bo com ells (jugant a les cartes),**

però no fa mai trampes (recordeu: és el bo). Probabilitat que guanyi una partida.

Sigui T jugar amb un trampós i G guanyar una partida. Podem representar



Si juga amb un trampós, la probabilitat de guanyar una partida és 0. Si juga amb un no trampós, té una probabilitat 0,5 de guanyar

$$P(G) = P(T)\cdot P(G/T) + P(\overline{T})\cdot P(G/\overline{T}) =$$
$$0{,}4\cdot 0 + 0{,}6\cdot 0{,}5 = 0{,}3$$

Podem raonar dient que espera guanyar la meitat de les partides que jugui amb un no trampós, és a dir, el 30% de les partides

11. **Un joc consisteix en llençar un dau fins que surti 6. Calculeu la probabilitat que s'acabi en el tercer llançament. Probabilitat que s'hagin de fer més de tres llançaments**.

La probabilitat d'acabar en el primer llançament és $\frac{1}{6}$

La probabilitat d'acabar en el segon llançament és la de no haver acabar en el primer i acabar en el segon (Treure un nombre diferent de 6 en el primer llançament i igual a 6 en el segon)

$$P(2) = \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{5}{36}$$

La d'acabar en el tercer

$$P(3) = \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{25}{216}$$

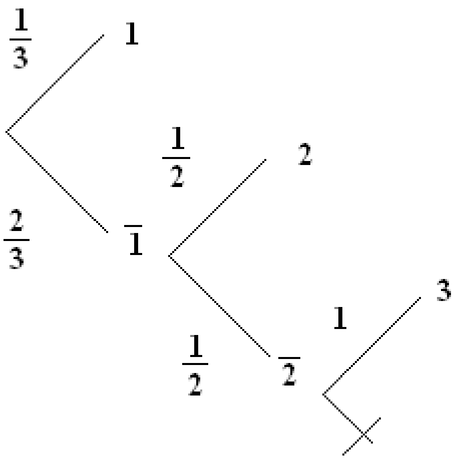
S'han de fer més de tres llançaments quan sigui fals que el joc s'ha acabat en el primer, segon o tercer.

$$P(>3) = 1 - \left(\frac{1}{6} + \frac{5}{36} + \frac{25}{216}\right) = 1 - \frac{91}{216} = \frac{125}{216}$$

Una segona manera és pensar que s'han de fer més de tres llançaments quan els tres primers resultats hagin estat nombres diferents de 6

$$P(>3)=\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{125}{216}$$

12. Un professor decideix rifar un apartament a la costa entre els seus tres millors alumnes. Agafa tres paperets, en deixa dos en blanc i en el tercer escriu "premi". Què és preferible: ser el primer a escollir, el segon o el tercer?



La probabilitat que toqui al primer és

$$P(1)=\frac{1}{3}$$

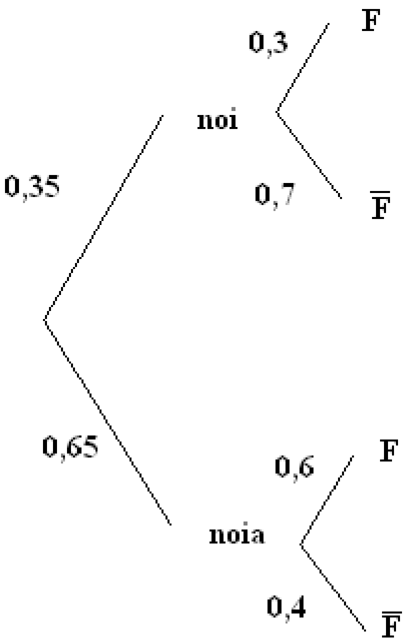
Si el primer no té el premi queden dos papers, un d'ells amb premi

$$P(2)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

Tocarà al tercer amb probabilitat

$$P(3)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{3}$$

13. En un cert institut el 65% dels alumnes són noies. El 30% dels nois festegen (exactament amb una noia). El 60% de les noies festegen (exactament amb un noi). S'escull un alumne a l'atzar i no festeja Probabilitat que sigui noia



$$P(noia/\overline{F})=\frac{P(noia)P(noia/\overline{F})}{P(\overline{F})}=$$

$$=\frac{0{,}65\cdot 0{,}4}{0{,}35\cdot 0{,}7+0{,}65\cdot 0{,}4}=\frac{0{,}26}{0{,}505}=0{,}514$$