1. **Si en una baralla de quaranta cartes n'extraiem dues a l'atzar, calcula la probabilitat que les dues siguin reis**

Si les extraccions són amb reemplaçament i com que hi ha quatre reis, la probabilitat és

$$P=\frac{4}{40}\cdot\frac{4}{40}=\frac{1}{100}$$

Si no reemplacem la primera carta, la probabilitat ara és

$$P=\frac{4}{40}\cdot\frac{3}{39}=\frac{3}{390}=\frac{1}{130}$$

2. **D'una capsa on hi ha dues boles blanques, una de negra i set de vermelles, n'extraiem dues successivament, Quina és la probabilitat d'obtenir una bola negra seguida d'una blanca si retornem a la capsa la primera bola, o la deixem a fora**

Si retornem la primera bola a la capça

$$P=\frac{1}{10}\cdot\frac{2}{10}=\frac{1}{50}$$

I si no la retornem

$$P=\frac{1}{10}\cdot\frac{2}{9}=\frac{1}{45}$$

3. **Si els esdeveniments A i B d'un experiment són independents i tenen les probabilitats p i q, calcula la probabilitat que en fer l'experiment només es compleixi un dels dos esdeveniments**

Si els esdeveniments A i B són independents és

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=pq$$

Aleshores la probabilitat de A i no B

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=p-pq=p(1-q)$$

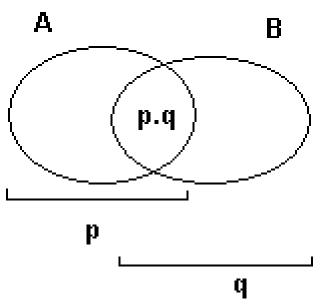
i la de B i no A

$$P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)=q-pq=q(1-p)$$

Si considerem les dues alhora

$$P(A-B)+P(B-A)=p(1-q)+q(1-p)=p+q-2pq$$

Podem considerar l'esquema



4. **Calcula la probabilitat d'obtenir almenys un sis doble en n tirades de dos daus**

La probabilitat de no treure un sis doble a la primera tirada és $P_1=\frac{35}{36}$ donat que hi ha 36 casos possibles i un únic sis doble

La de no treure cap sis doble en dues tirades serà $P_2 = \left(\frac{35}{36}\right)^2$, en tres tirades $P_3 = \left(\frac{35}{36}\right)^3$, i així en n tirades $P_n = \left(\frac{35}{36}\right)^n$. L'esdeveniment obtenir almenys un sis doble és el contrari dels anteriors, així la probabilitat d'obtenir almenys un sis doble en n tirades és $1-\left(\frac{35}{36}\right)^n$

5. **La probabilitat que una bomba llançada des d'un avió toqui l'objectiu és 1/3. Calcula la probabilitat de tocar l'objectiu si es llancen tres bombes seguides**

Cada llançament és independent dels altres. La probabilitat que no encertin l'objectiu cap de les tres bombes és

$$P = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{8}{27}$$

I la probabilitat que demanen és la complementària

$$P = 1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27}$$

6. **Calcula la probabilitat de guanyar un o més jocs en una sèrie de m jocs independents si la probabilitat de guanyar-ne un és p. Troba el valor de p perquè la probabilitat sigui igual a $1-\frac{1}{2^m}$**

Considerem l'esdeveniment "no guanyar cap dels m jocs". La probabilitat de no guanyar un és 1-p, la de no guanyar cap dels m jocs serà $(1-p)^m$, aleshores l'esdeveniment complementari és guanyar-ne un o més i tindrà una probabilitat complementària $1-(1-p)^m$. Si ara igualem i resolem

$$1-\frac{1}{2^m} = 1-(1-p)^m \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2^m} = (1-p)^m \quad \Rightarrow \frac{1}{2} = 1-p \quad \Rightarrow p = \frac{1}{2}$$

7. **Calcula la probabilitat de guanyar dos o tres jocs independents si la probabilitat de guanyar-ne un és 0,01**

La de perdre els tres jocs és $P_3 = 0{,}99^3$

La de perdre'n dos és $P_2 = P(GPP) + P(PGP) + P(PPG) = 3\cdot 0{,}99^2 \cdot 0{,}01$

Volem la probabilitat complementària, guanyar dos o tres jocs

$$P = 1-(0{,}99^3 + 3\cdot 0{,}99^2\cdot 0{,}01) = 1-(0{,}970299 + 0{,}029403) = 0{,}000298$$

8. **Donats dos esdeveniments independents A i B, la probabilitat que es presentin els dos a la vegada és 1/6 i la probabilitat que no es presenti cap d'ells és 1/3. Calcula la probabilitat de cadascun i raona la resposta**

Si A i B són independents és $P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B) = \frac{1}{6}$

I si la probabilitat que no es presenti cap d'ells es coneguda

$$1-P(A\cup B) = \frac{1}{3} = 1-P(A)-P(B)+\frac{1}{6}$$

D'on podem plantejar el sistema d'equacions

$$\begin{cases} P(A)\cdot P(B)=\dfrac{1}{6} \\ P(A)+P(B)=\dfrac{5}{6}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy=\dfrac{1}{6} \\ x+y=\dfrac{5}{6}\end{cases}$$

Si resolem aquest sistema obtenim les solucions $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, que podem intercanviar per a P(A) i P(B)

9. Siguin dos esdeveniments A i B de manera que $P(A)=\frac{1}{2}$; $P(B)=\frac{3}{5}$. Comprova que si $P(A\cup B)=\frac{4}{5}$ aleshores són independents. Per als mateixos valors de P(A) i P(B) donats abans, hi ha altres valors de $P(A\cup B)$ que facin que A i B siguin independents?

Si $P(A\cup B)=\frac{4}{5}=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Rightarrow \frac{4}{5}=\frac{1}{2}+\frac{3}{5}-P(A\cap B)$

d'on $P(A\cap B)=\frac{3}{10}$. Aleshores $P(A\cap B)=\frac{3}{10}=P(A)\cdot P(B)$ i A i B són independents i aquesta és la única possibilitat quan $P(A\cup B)=\frac{4}{5}$

10. Un estudiant fa dues proves el mateix dia. La probabilitat que passi la primera prova és 0,6, la probabilitat que passi la segona és 0,8 i la de passar totes dues és 0,5. Quina és la probabilitat de passar, com a mínim, una prova? Quina és la probabilitat de no passar-ne cap? Són les proves esdeveniments independents? Quina és la probabilitat de no passar la segona prova en el cas de no haver superat la primera?

Siguin A i B els esdeveniments aprovar la primera o la segona prova. Sabem que
$P(A)=0{,}6 \quad P(B)=0{,}8 \quad P(A\cap B)=0{,}5$

Aleshores $P(A\cup B)=0{,}6+0{,}8-0{,}5=0{,}9$ té probabilitat 0,9 d'aprovar alguna de les dues proves, i la complementària 0,1 de no aprovar-ne cap

Els esdeveniments A i B no són independents ja que
$P(A\cap B)=0{,}5\neq 0{,}48=P(A)\cdot P(B)$

La probabilitat de no aprovar la segona si no ha aprovat la primera és

$$P(\overline{B}/\overline{A})=\frac{P(\overline{B}\cap\overline{A})}{P(\overline{A})}$$

ara calculem $P(\overline{B}\cap\overline{A})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-0{,}9=0{,}1$

i

$$P(\overline{B}/\overline{A})=\frac{P(\overline{B}\cap\overline{A})}{P(\overline{A})}=\frac{0{,}1}{1-0{,}6}=\frac{1}{4}=0{,}25$$

11. Troba la probabilitat que surti un rei i un cavall en extreure simultàniament dues cartes d'una baralla espanyola

Considerem 40 cartes, d'ells 4 reis i 4 cavalls

$$P=P(R_1)P(C_2)+P(C_1)P(R_2)=\frac{4}{40}\cdot\frac{4}{39}+\frac{4}{40}\cdot\frac{4}{39}=\frac{32}{1560}=0{,}0205$$

12. Si tenim una urna amb sis boles blanques i cinc boles negres i fem tres extraccions retornant cada cop la bola a la urna, quina és la probabilitat que surtin dues boles blanques i una de negra? I si després de cada

extracció no tornem a introduir la bola a l'urna, quina és la probabilitat del mateix esdeveniment d'abans?

Si reemplacen les boles les probabilitats de treure una bola de cada un dels colors seran les mateixes en cada una de les tres extraccions

Hi ha tres maneres de treure dues boles blanques i una de negra en tres extraccions, son BBN, BNB, NBB. La probabilitat és

$$P = 3 \cdot \frac{6}{11} \cdot \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{11} = \frac{540}{1331} = 0{,}4057$$

Si fem les extraccions sense reemplaçament tenim també les mateixes tres maneres de treure dues boles blanques i una de negre, però les probabilitats de cada una de les extraccions canvien. Ara és

$$P = 3 \cdot \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{5}{11} = 0{,}4545$$

13. Si llancem una moneda fins que surti cara, quina és la probabilitat que l'haguem de llançar menys de cinc cops?

La probabilitat d'acabar en el primer llançament, és a dir, de treure cara a la primera, és $P(1) = \frac{1}{2}$

Acabarem en el segon llançament quan en el primer no surti cara i en el segon surti cara. La probabilitat és $P(2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$

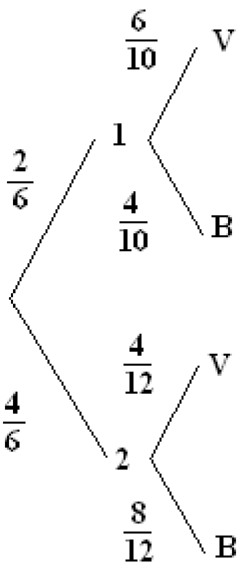
Acabarem en el tercer amb probabilitat $P(3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$ i en el quart $P(4) = \left(\frac{1}{2}\right)^4$. Aleshores hem de llençar menys de cinc cops amb probabilitat

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

14. Tenim dues urnes, la primera amb sis boles vermelles i quatre blanques, la segona amb quatre vermelles i vuit blanques. Tirem un dau. Si surt un nombre més petit que 3 anem a la primera urna, si surt 3 o un nombre més gran anem a la segona. A continuació extraiem una bola. Quina probabilitat hi ha que la bola sigui vermella i de la urna segona? Quina probabilitat hi ha que la bola sigui blanca?

La probabilitat d'anar a la primera de les urnes és $P(1) = \frac{2}{6}$ i la d'anar a la segona és $P(2) = \frac{4}{6}$, ja que en el llançament d'una dau hi ha dos resultats menors que 3 i quatre resultats iguals o superiors a tres.

En cada una de les urnes la probabilitat de treure una bola de color vermell o de color blanc ve donada per la composició de cada una. La situació és pot indicar en el gràfic



La probabilitat que sigui vermella i de la urna segona és

$$P(V \cap 2) = P(V/2) \cdot P(2) = \frac{4}{12} \cdot \frac{4}{6} = \frac{2}{9}$$

La probabilitat que sigui blanca

$$P(B) = P(1) \cdot P(B/1) + P(2) \cdot P(B/2) =$$

$$= \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{10} + \frac{4}{6} \cdot \frac{8}{12} = \frac{26}{45}$$

Si calculéssim la probabilitat de ser vermella

$$P(V) = P(1) \cdot P(V/1) + P(2) \cdot P(V/2) =$$

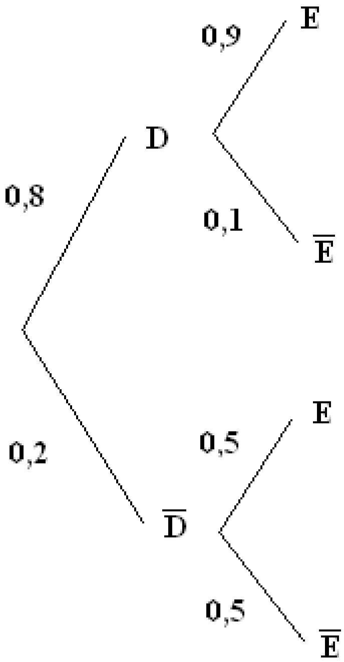
$$= \frac{2}{6} \cdot \frac{6}{10} + \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{12} = \frac{19}{45}$$

Val la pena observar que

$$\frac{26}{45} + \frac{19}{45} = 1$$

15. Un estudiant ha de fer un examen a primera hora, però amb el despertador que té només aconsegueix despertar-se el 80% de les vegades. Si sent el despertador la probabilitat d'arribar a l'examen és 0,9, mentre que si no el sent la probabilitat és 0,5. Si arriba a l'examen, quina és la probabilitat que hagi sentit el despertador? Si no arriba a l'examen, quina és la probabilitat que no hagi sentit el despertador?

Siguin D i E els esdeveniments "es desperta amb el despertador" i "arriba a l'examen". La situació es pot representar



$$P(D/E) = \frac{P(D)P(E/D)}{P(E)} =$$

$$= \frac{0{,}8 \cdot 0{,}9}{0{,}8 \cdot 0.9 + 0{,}2 \cdot 0{,}5} = 0{,}8780$$

On P(E)=0,82 és la probabilitat de fer l'examen

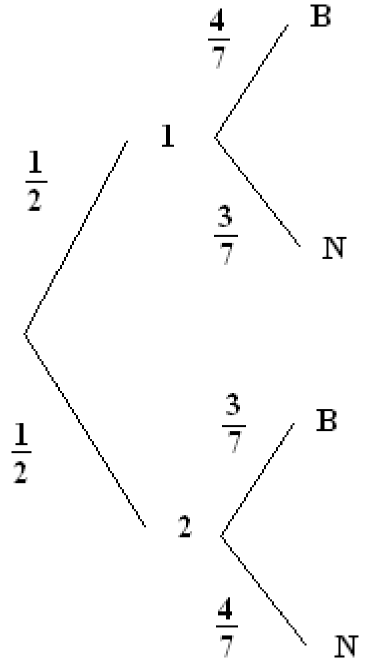
Aleshores $P(\overline{E}) = 1 - 0{,}82 = 0{,}18$ és la probabilitat de no fer-lo

$$P(\overline{D}/\overline{E}) = \frac{P(\overline{D})P(\overline{E}/\overline{D})}{P(\overline{E})} =$$

$$= \frac{0{,}2 \cdot 0{,}5}{0{,}18} = 0{,}5555$$

16. Tenim dues capces. La capsa A conté quatre boles blanques i tres boles negres, mentre que la capsa B conté tres blanques i quatre negres. Si seleccionem una capsa a l'atzar i tot seguit extraiem una bola, calcula les probabilitats que la bola sigui blanca i que la bola sigui negra

Siguin 1 i 2 la primera o la segona capça, i N o B el color de les boles. Les diferents probabilitats són



Les capces es trien a l'atzar, aleshores la probabilitat d'escollir la primera ha de ser la mateixa que la d'escollir la segona

$P(B) = P(1)P(B/1) + P(2)P(B/2) =$

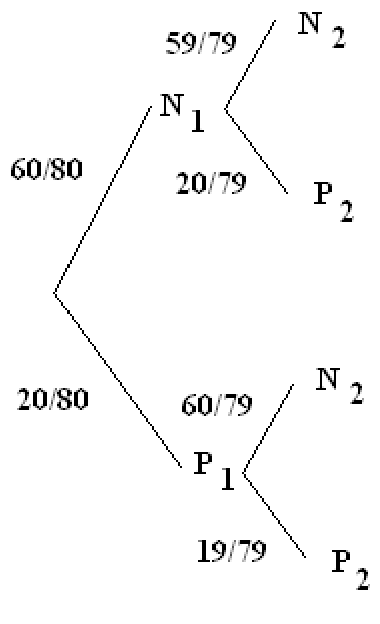
$\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}=\frac{4}{14}+\frac{3}{14}=\frac{7}{14}=\frac{1}{2}$

i la d'obtenir una bola negra serà també $\frac{1}{2}$

17. En una prestatgeria hi ha seixanta novel·les i vuit llibres de poesia. Una persona agafa a l'atzar un llibre i se l'endú. A continuació una altra persona n'agafa un altre també a l'atzar. Quina probabilitat hi ha que la segona persona hagi agafat una novel·la? Si la segona persona ha agafat una novel·la, quina és la probabilitat que la primera hagi agafat un llibre de poesia?

La primera persona pot agafar una novel·la N_1 o un llibre de poesia P_1. La segona persona una novel·la N_2 o un llibre de poesia P_2.

Les diferents probabilitats són



La segona persona ha agafat una novel·la

$P(N_2) = P(N_1)P(N_2/N_1) + P(P_1)P(N_2/P_1) =$

$=\frac{60}{80}\cdot\frac{59}{79}+\frac{20}{80}\cdot\frac{60}{79}=\frac{3}{4}$

La probabilitat que la primera hagi agafat un llibre de poesia si la primera ha agafat una novel·la és

$P(P_1/N_2) = \frac{P(P_1)\cdot P(N_2/P_1)}{P(N_2)} =$

$=\frac{\frac{20}{80}\cdot\frac{60}{79}}{\frac{3}{4}}=\frac{20}{79}$

18. Tenim tres capces amb bombetes. A la primera hi ha deu bombetes, de les quals quatre estan foses, a la segona hi ha sis bombetes, una de les quals està fosa, i a la tercera hi ha tres bombetes foses d'un total de vuit. Quina és la probabilitat que en agafar una bombeta a l'atzar de qualsevol de les capces estigui fosa?

Si F és l'esdeveniment "està fosa" i 1,2 i 3 representen les capces, les probabilitats condicionades de treure una bombeta fosa de cada una de les capces són

$P(F/1)=\frac{4}{10}\quad P(F/2)=\frac{1}{6}\quad P(F/3)=\frac{3}{8}$

Les probabilitats d'escollir una de les tres capces són $\frac{1}{3}$. Aleshores podem escollir una bombeta fosa amb probabilitat

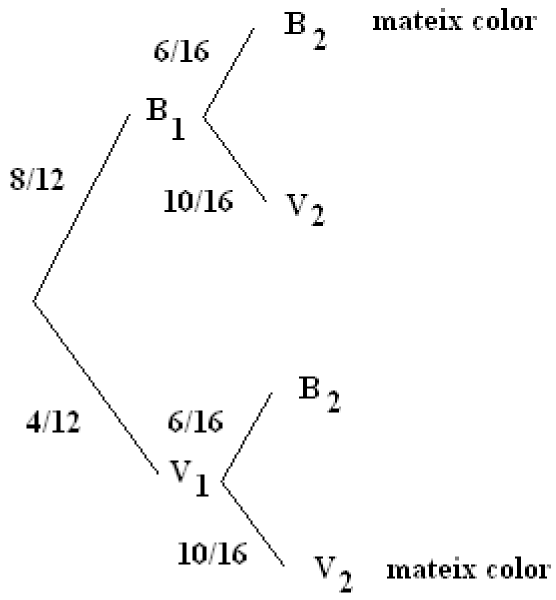
$P(F)=P(1)P(F/1)+P(2)P(F/2)+P(3)P(F/3)=$

$\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{10}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{8}=\frac{113}{360}=0{,}31$

19. Tenim dues urnes, una amb vuit boles blanques i quatre de verdes i l'altra amb sis boles blanques i deu de verdes. Si extraiem una bola de cada urna, quina probabilitat hi ha que les dues siguin del mateix color?

Representem les extraccions de la primera i la segona de les urnes fent servir subíndexs. Tindrem boles del mateix color quan sigui blanca a la primera i a la segona, o verda a la primera i a la segona.

Les probabilitats són les indicades en l'esquema

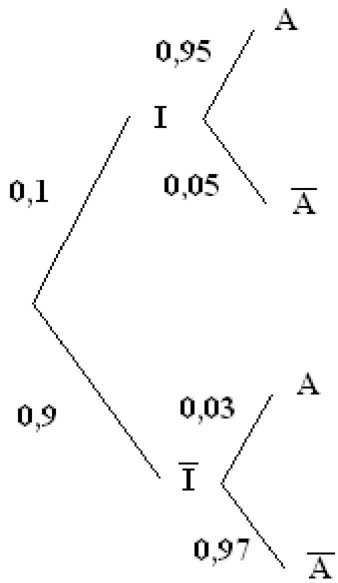


La probabilitat de ser del mateix color serà

$P(B_1)P(B_2/B_1)+P(V_1)P(V_2/V_1)=\frac{8}{12}\cdot\frac{6}{16}+\frac{4}{12}\cdot\frac{10}{16}=\frac{88}{192}=\frac{11}{24}=0{,}4583$

20. En un sistema d'alarma, la probabilitat que hi hagi un incident és 0,1. Si es produeix realment l'incident la probabilitat que l'alarma soni és 0,95. La probabilitat que l'alarma soni sense que s'hagi produït cap incident és 0,03. Si l'alarma ha sonat, quina és la probabilitat que no hi hagi hagut cap incident?

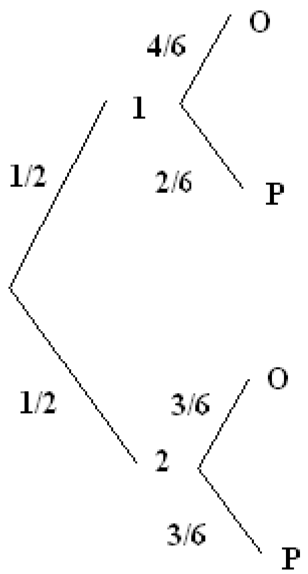
I és l'esdeveniment "hi ha un incident" i A "sona l'alarma". La situació és



$$P(\bar{I}/A)=\frac{P(\bar{I})\cdot P(A/\bar{I})}{P(A)}=$$

$$=\frac{0{,}9\cdot 0{,}03}{0{,}1\cdot 0{,}95+0{,}9\cdot 0{,}03}=\frac{0{,}027}{0{,}095+0{,}027}=0{,}2213$$

21. Un armari té dos calaixos: al primer hi ha quatre monedes d'or i dues de plata, mentre que al segon hi ha tres monedes d'or i tres de plata. Obrim un calaix a l'atzar i n'extraiem una moneda. Calcula la probabilitat que el calaix obert hagi estat el segon i hàgim agafat una moneda d'or. Calcula la probabilitat que el calaix obert hagi estat el primer sabent que se n'ha extret una moneda d'or.



Les probabilitat d'escollir el primer o el segon calaix són les mateixes

La probabilitat d'obrir el segon calaix i escollir una moneda d'or és

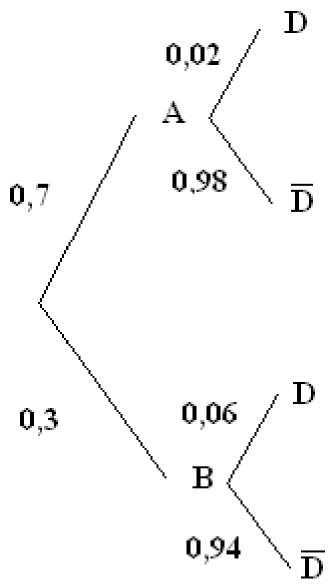
$$P(2)P(O/2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{6}=\frac{1}{4}=0{,}25$$

La probabilitat d'obrir el primer sabent que la moneda és d'or

$$P(1/O)=\frac{P(1)P(O/1)}{P(O)}=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{6}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{6}}=\frac{\frac{4}{12}}{\frac{7}{12}}=\frac{4}{7}=0{,}5714$$

22. Les probabilitats que un cert article hagi estat fabricat per les màquines A i B són 0,7 i 0,3, respectivament. La probabilitat que la màquina A produeixi articles defectuosos és 0,02, mentre que la de la màquina B és 0,06. S'agafa un article i resulta que és defectuós. Busca la probabilitat que hagi estat produït per la màquina A



$$P(A/D)=\frac{P(A)P(D/A)}{P(D)}=$$
$$=\frac{0{,}7\cdot 0{,}02}{0{,}7\cdot 0{,}02+0{,}3\cdot 0{,}06}=0{,}4375$$