1. D'una urna on hi ha vuit boles vermelles, cinc boles grogues i set de verdes, n'extraiem una a l'atzar. Determina les probabilitats: que sigui vermella, que sigui verda, que sigui groga, que no sigui vermella, que no sigui groga.

$P(vermella) = \frac{8}{20} = 0,4 \quad P(verda) = \frac{7}{20} = 0,35 \quad P(groga) = \frac{5}{20} = 0,25$

$P(no\ vermella) = 1 - P(vermella) = 1 - 0,4 = 0,6$

$P(no\ groga) = 1 - P(groga) = 1 - 0,25 = 0,75$

2. Si llancem a l'aire tres monedes, determina la probabilitat d'obtenir almenys dues creus

El llançament de tres monedes té 8 esdeveniments elementals. D'ells n'hi ha quatre que tenen, almenys, dues creus (+++), (++C), (+C+) i (C++). La probabilitat és

$P = \frac{4}{8} = 0,5$

3. De l'experiment de tirar dos daus, troba la probabilitat que la suma dels punts obtinguts sigui més petita que 7

El llançament de dos daus és un espai de 36 esdeveniments elementals. Aquells que donen suma 2 és (1,1), els de suma 3 (2,1) i (1,2), els de suma 4 (2,2), (3,1) i (1,3), els de suma 5 (1,4)(4,1)(2,3)(3,2) i els de suma 6 (1,5)(5,1)(2,4)(4,2)(3,3). Aleshores la probabilitat de suma menor que 7 és

$P = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{5}{36} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$

4. Si tenim una moneda trucada en que la probabilitat d'obtenir cara és el triple de la probabilitat d'obtenir creu, quina és la probabilitat de cada esdeveniment elemental?

Si x és la probabilitat de creu, la de cara és 3x i la suma de les probabilitats de cara i creu ha de ser 1. Aleshores $x + 3x = 1 \quad \Rightarrow x = \frac{1}{4}$. Les probabilitats són $P(+) = \frac{1}{4}$ i $P(C) = \frac{3}{4}$

5. Si tenim un dau trucat de manera que la probabilitat d'obtenir les diferents cares és directament proporcional als nombres d'aquestes, determina la probabilitat de cada una de les cares i la probabilitat d'obtenir un nombre parell.

Les diferents probabilitats són P(1)=k; P(2)=2k, P(3)=3k;... P(6)=6k. I la suma de les probabilitats dels sis esdeveniments independents ha de sumar 1

$k + 2k + 3k + 4k + 5k + 6k = 1 \quad \Rightarrow 21k = 1 \quad \Rightarrow k = \frac{1}{21}$

i les probabilitats són

$P(1) = \frac{1}{21}; \quad P(2) = \frac{2}{21}; P(3) = \frac{3}{21}; \quad P(4) = \frac{4}{21}; \quad P(5) = \frac{5}{21}; \quad P(6) = \frac{6}{21}$

I la d'un nombre parell

$P(parell) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{12}{21}$

6. Busca la probabilitat d'un esdeveniment si sabem que la suma del seu quadrat i la del quadrat de la probabilitat de l'esdeveniment contrari és $\frac{5}{9}$

Les probabilitats de l'esdeveniment són p i 1-p, ja que és el seu contrari. Podem plantejar

$$p^2 + (1-p)^2 = \frac{5}{9} \quad \Rightarrow p^2 + 1 - 2p + p^2 = \frac{5}{9} \quad \Rightarrow 2p^2 - 2p - \frac{4}{9} = 0$$

Si resolem aquesta equació les solucions són $\frac{1}{3}$ i $\frac{2}{3}$

7. En un congrés de científics hi ha 100 congressistes, dels quals 80 parlen francès i 40 anglès. Quina és la probabilitat que dos congressistes triats a l'atzar no puguin entendre's sense intèrpret?

Imaginem que tots parlen, almenys, un dels dos idiomes. Aleshores, Si C és el cardinal de cada conjunt

$C(F) = 80 \quad C(A) = 40 \quad C(F \cup A) = 100$, d'on

$C(F \cap A) = C(F) + C(A) - C(F \cup A) = 80 + 40 - 100 = 20$

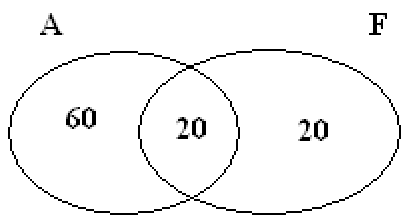
N'hi ha 20 que parlen els dos idiomes

La probabilitat que els calgui un intèrpret es pot determinar calculant les possibles converses entre els 100 congressistes

$$C_{100,2} = \binom{100}{2} = 4950$$

Podem formar 4950 parelles de congressistes, d'elles no s'entendran si formen una parella dels 60 que només parlen francès amb els 20 que només parlen anglès, és a dir, de 20.60=1200

La probabilitat és $\frac{1200}{4950}$. La distribució és la que indica el gràfic



8. En una ciutat el 60% dels nenes tenen la grip, el 50% el xarampió i el 20% les dues malalties. Calcula la probabilitat que un nen agafat a l'atzar tingui la grip, el xarampió o les dues coses. Si en una escola hi ha 450 nens, quants és previsible que tinguin la grip o el xarampió?

Siguin G i X els esdeveniments tenir la grip i el xarampió. Sabem $P(G) = 0{,}6$, $P(X) = 0{,}5$ i $P(G \cap X) = 0{,}2$, d'on

$P(G \cup X) = P(G) + P(X) - P(G \cap X) = 0{,}6 + 0{,}5 - 0{,}2 = 0{,}9$

És la probabilitat que un nen tingui una o les dues malalties. La probabilitat que no en tingui cap és la complementària $1 - 0{,}9 = 0{,}1$

D'una escola de 450 nens tenen alguna d'aquestes malalties $450 \cdot 0{,}9 = 405$

9. En un banquet de noces deu persones s'asseuen a l'atzar a la taula presidencial, entre els quals hi ha, evidentment, els nuvis. Quina probabilitat hi ha que els nuvis seguin de costat?

Les maneres d'asseure's les deu persones a l'atzar són $P_{10} = 10!$. Les maneres on els nuvis estaran de costat es poden calcular considerant a la parella com una sola persona. Aleshores tenim 9 persones que poden estar de $P_9 = 9!$. Però si pensem que els nuvis poden permutar entre ells la probabilitat serà

$$P=\frac{2\cdot 9\,!}{10\,!}=\frac{1}{5}$$

10. Un jugador va expressar a Galileu la seva sorpresa en observar que, jugant amb tres daus, la suma 10 apareix amb més freqüència que la suma 9. Explica el perquè de la seva sorpresa

Opinava que hi havia els mateixos casos favorable de suma 10 que de suma 9, i aquests eren

suma 9	126, 135, 144, 225, 234, 333
suma 10	136, 145, 226, 235, 244, 334

Però hem d'observar que una d'aquestes, per exemple 126, pot permutar entre ells de $3\,!=6$ maneres, i això passa en totes excepte quan hi ha xifres repetides: Així 144 pot permutar de 3 maneres i 333 que és única

Aleshores les probabilitats són

$$P(suma\ 9)=\frac{6}{216}+\frac{6}{216}+\frac{3}{216}+\frac{3}{216}+\frac{6}{216}+\frac{1}{216}=\frac{25}{216}$$

$$P(suma\ 10)=\frac{6}{216}+\frac{6}{216}+\frac{3}{216}+\frac{6}{216}+\frac{3}{216}+\frac{3}{216}=\frac{27}{216}$$

11. Calcula la probabilitat que la suma dels punts de les cares visibles d'un dau llançat a l'atzar sigui múltiple de 5

Hi ha una cara no visible. Les sumes possibles amb les cinc cares que poden veure's són

2+3+4+5+6=20, és múltiple de 5

1+3+4+5+6=19

1+2+4+5+6=18

1+2+3+5+6=17

1+2+3+4+6=16

1+2+3+4+5=15, és múltiple de 5

Hi ha, aleshores, dos casos favorables. La probabilitat és $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

12. Llancem dos daus i considerem els esdeveniments A= "la diferència de les puntuacions obtingudes en cada dau és 2" i B= "obtenir almenys un 6". Troba la probabilitat de $A\cup B$

Els casos favorables a A són

(1,3) (3,1) (2,4) (4,2) (3,5) (5,3) (4,6) (6,4)

Els favorables a B

(1,6) (2,6) (3,6) (4,6) (5,6) (6,6) (6,1) (6,2) (6,3) (6,4) (6,5)

Els de $A\cap B$

(4,6) (6,4)

Aleshores la probabilitat de $A\cup B$ és

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{8}{36}+\frac{11}{36}-\frac{2}{36}=\frac{17}{36}$$

Una manera diferent de comptar els esdeveniments elementals que verifiquen A o B és representar en una taula els 36 possibles resultats. La fila és el resultat del primer dau i la columna el resultat del segon. Indiquem en cada cel·la A o B segons verifica l'esdeveniment A o B

	1	2	3	4	5	6
1			A			B
2				A		B
3	A				A	B
4		A				AB
5			A			B
6	B	B	B	AB	B	B

13. Si llancem un dau dues vegades, quina és la probabilitat que a la segona tirada surti un nombre més petit que a la primera?

Els casos favorables són

(2,1) (3,1) (3,2) (4,1) (4,2) (4,3) (5,1) (5,2) (5,3) (5,4) (6,1) (6,2) (6,3) (6,4) i (6,5)

Aleshores la probabilitat és

$$P = \frac{15}{36}$$

Si representem els resultats en una taula com l'exercici anterior tindrem

	1	2	3	4	5	6
1		X	X	X	X	X
2			X	X	X	X
3				X	X	X
4					X	X
5						X
6						

Una manera interessant de resoldre aquest exercici és calcular la probabilitat del mateix resultat en els dos daus, que és $\frac{6}{36}$, aleshores la probabilitat que el primer sigui superior al segons serà, per simetria, la mateixa que el segon sigui superior al primer i aquest dos són esdeveniments complementaris al resultat igual. Aleshores

$$2P + \frac{6}{36} = 1 \Rightarrow 2P = \frac{30}{36} \quad \Rightarrow P = \frac{15}{36}$$

14. Siguin A i B dos esdeveniments i A' l'esdeveniment contrari de A. Si coneixem les probabilitats dels esdeveniments $A \cup B$, A' i $A \cap B$, com podem trobar les probabilitats de B, A i $A' \cap B$?

$$P(B) = P(A \cup B) - P(A) + P(A \cap B)$$
$$P(A) = P(A \cup B) - P(B) + P(A \cap B)$$
$$P(A' \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$$

15. Siguin A i B dos esdeveniments dels quals coneixem les probabilitats $P(A) = a$, $P(B) = b$, i $P(A \cap B) = c$. En funció de a, b i c calcula les probabilitats de $P(\overline{A} \cup \overline{B})$, $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ i $P(\overline{A} \cup B)$

$$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - c$$
$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (a + b - c) = 1 - a - b + c$$
$$P(\overline{A} \cup B) = P(\overline{A}) + P(B) - P(\overline{A} \cap B) = 1 - a + b - (b - c) = 1 - a + c$$

16. Quina és la probabilitat de la diferència de dos esdeveniments un dels quals està contingut en l'altre?

Si A està contingut en B és $P(A) = P(A \cap B)$ i la probabilitat de la diferència B-A serà

$$P(B - A) = P(B) - P(A)$$

17. Sigui S un espai d'esdeveniments i A i B dos esdeveniments de S de manera que $P(A)=0{,}6$, $P(B)=0{,}7$ i $P(A\cup B)-P(A\cap B)=0{,}3$, calculeu $P(A\cup B)$ i $P(A\cap B)$

$$\begin{cases} P(A\cup B)=0{,}6+0{,}7-P(A\cap B) \\ P(A\cup B)-P(A\cap B)=0{,}3 \end{cases} \quad \begin{cases} P(A\cup B)+P(A\cap B)=1{,}3 \\ P(A\cup B)-P(A\cap B)=0{,}3 \end{cases}$$

Si ara sumem les dues equacions obtenim

$2P(A\cup B)=1{,}6 \Rightarrow P(A\cup B)=0{,}8$

i $P(A\cap B)=1{,}3-0{,}8=0{,}5$