Posició relativa de rectes i plans

1. Determina l'equació del pla que passa per P(1,2,1) i conté la recta intersecció dels plans
$\pi : x - 2y + z = 3$ i el pla YZ
2. Estudia la posició relativa de la recta
$$r : \frac{x+2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{2}$$
i el pla $\pi : 3x + 2y - z = -3$
3. Considera les rectes
$$r : \begin{cases} x = z \\ y = 1 \end{cases} \qquad r' : \frac{x-1}{2} = y - 1 = \frac{z-1}{a}$$
on a és una constant. Comprova que aquestes dues rectes són secants per a qualsevol valor de a i determina el valor de a per tal que siguin perpendiculars
4. Comprova que les rectes
$$r : x - 1 = y = z - 2 \qquad s : \begin{cases} x - z = 5 \\ y - z = 2 \end{cases}$$
son paral·leles i escriu l'equació del pla que les conté
5. Escriu l'equació de la recta que passa per l'origen de coordenades i és paral·lela a la recta
$$\begin{cases} 3x - 2y + 3z = 5 \\ 4x - y + z = 7 \end{cases}$$
6. Sigui r la recta d'equació
$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases}$$
troba l'equació cartesiana del pla que conté la recta r i és perpendicular al pla y=0
7. Troba les equacions de la recta que passa pel punt P(-1,0,0) i és paral·lela als plans
$\pi_1 : 2x - y - z + 1 = 0 \qquad \pi_2 : x + 3y + z = 5$
8. Considera l'equació
$$(x + y + z)^2 + (3x - y + 2z - 1)^2 = 0$$
dóna una interpretació geomètrica dels punts P(x,y,z) que verifiquin aquesta equació. No cal desenvolupar els quadrats
9. Calcula els valors de m i n per tal que el pla
$\pi : nx + my - z - 2 = 0$
contingui la recta
$$r : \begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ x + z = 4 \end{cases}$$
10. Troba l'equació de la recta projecció ortogonal de
$$r : \begin{cases} x - 2y + 5z = 9 \\ -2x + 3y + z + 3 = 0 \end{cases}$$
sobre el pla d'equació
$2x + 2y - z + 6 = 0$
11. Escriu l'equació del pla perpendicular a la recta que passa pels punts P(2,-1,3) i Q(-3,1,-2) i que conté el punt mitjà del segment PQ
12. Considera una recta r d'equacions
$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$$
i el pla π d'equació
$A''x + B''y + C''z + D'' = 0$

digues què significa geométricament que el sistema que s'obté considerant les tres equacions sigui incompatible. Digues què significa geométricament que aquest sistema sigui compatible determinat o indeterminat

13. Determina si la recta

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+1}{5}$$

i el pla $3x+2y+5=0$ són paral·lels. Es troba la recta continguda en el pla?

14. Considera la recta r que té com equacions

$$\begin{cases} x=3+\lambda \\ y=4+\lambda \\ z=6+\lambda \end{cases}$$

i la r' que té com a equacions

$$x-1=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{2}$$

Comprova que les dues rectes s'encreuen. Dóna les coordenades d'un punt P de r i un punt Q de r' que verifiquin la condició que la recta PQ sigui la perpendicular comuna a r i a r'

15. Donada la recta

$$r:\begin{cases} 2x+(a-5)y-2z=3a-13 \\ ay-2z=3a \end{cases}$$

determina a per tal que existeixi un pla que contingui aquesta recta i que sigui perpendicular al vector $\vec{v}=(1,1,1)$. Escriu l'equació cartesiana d'aquest pla

16. Determina k per tal que existeixi un pla que contingui la recta

$$\begin{cases} x-2y-6z=1 \\ 2x-2y-3z=6 \end{cases}$$

i que sigui perpendicular al vector (-6,8,k)

17. Discuteix la posició relativa dels plans

$$\pi_1: ax+y+az=0$$

$$\pi_2: (a+3)x+\left(\frac{1}{a}\right)y+z=1$$

segons els valors de $a \neq 0$

18. Sigui el punt $P_1(1,0,-1)$, P_2 el punt simètric de P_1 respecte del pla d'equació $x-2y=0$ i P_3 el simètric de P_2 respecte del pla d'equació $x+2y+z=1$. Troba l'equació general del pla que determinen els punts P_1, P_2 i P_3

19. Troba a i b per tal que els plans següents passin per una mateixa recta

$$\pi: x+2y-z=1$$

$$\pi': 2x+y+az=0$$

$$\pi'': 3x+3y-2z=b$$

20. Hi ha algun valor de k pel qual els quatre plans tinguin un punt en comú? Si és així troba aquest punt

$$\pi: x+2y-3=0$$

$$\pi': 3x+y+z=-1$$

$$\pi'': 2y-z+2=0$$

$$\pi''': x-y+kz+5=0$$

21. Considera la recta

$$r:\begin{cases} x-y-3z=1 \\ x-3y+z=5 \end{cases}$$

Digues si el punt (6,2,2) es troba en la recta paral·lela a r que passa per l'origen de coordenades

22. Explica la relació que hi ha entre el vector associat a un pla i un vector director d'una recta perpendicular a aquest. Troba l'equació del pla que conté el punt (1,1,0) i és perpendicular a la recta

$$r:\begin{cases} x+y-2z+1=0 \\ 2x-y+z-1=0 \end{cases}$$

23. Estudia la posició relativa de les rectes r i r'

$$r:\frac{2x-1}{4}=\frac{4y-1}{2}=z$$

$$r':\begin{cases} 3x-y+3z=0 \\ x+4y+z=0 \end{cases}$$

24. Considera la recta

$$r:\begin{cases} 3x-y+2z-1=0 \\ x+4y-z-b=0 \end{cases}$$

i el pla

$$\pi:2x-5y+az+2=0$$

Determina els valors de a i b per tal que

a) r i π siguin secants. Troba el punt d'intersecció
b) r i π siguin paral·lels
c) la recta r estigui continguda en el pla π

1. Determina l'equació del pla que passa per P(1,2,1) i conté la recta intersecció dels plans $\pi : x - 2y + z = 3$ **i el pla YZ**

El pla YZ té d'equació x=0. El feix de plans que conté la recta intersecció dels plans té d'equació

$$\lambda\,(x - 2y + z - 3) + \mu\,(x) = 0$$

d'aquest feix determinem aquell que passi per P(1,2,1) i obtenim una relació entre λ i μ

$$\lambda\,(1 - 4 + 1 - 3) + \mu\,(1) = 0 \quad \Rightarrow \mu = 5\lambda$$

aleshores el pla és

$$(x - 2y + z - 3) + 5x = 0 \Rightarrow \quad 6x - 2y + z - 3 = 0$$

2. Estudia la posició relativa de la recta

$$r : \frac{x+2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{2}$$

i el pla $\pi : 3x + 2y - z = -3$

Estudiem el sistema format per dues equacions de la recta i l'equació del pla

$$\begin{cases} 2x + 4 = 3y \\ 2x + 4 = 3z - 9 \\ 3x + 2y - z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ 2x - 3z = -13 \\ 3x + 2y - z = 3 \end{cases}$$

si analitzem la matriu del sistema obtenim

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & -3 & -13 \\ 3 & 2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} [1] \\ 2[2]-2[1] \\ 2[3]-3[1] \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & -4 \\ 0 & 6 & -6 & -18 \\ 0 & 13 & -2 & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} [1] \\ [2] \\ 6[3]-13[2] \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & -4 \\ 0 & 6 & -6 & -18 \\ 0 & 0 & 66 & 270 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} [1] \\ 66[2]+6[3] \\ [3] \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 132 & -198 & 0 & -264 \\ 0 & 396 & 0 & 432 \\ 0 & 0 & 66 & 270 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 396[1]+198[2] \\ [2] \\ [3] \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 52272 & 0 & 0 & -19008 \\ 0 & 396 & 0 & 432 \\ 0 & 0 & 66 & 270 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{Dividim per 52272} \\ \text{Dividim per 396} \\ \text{Dividim per 66} \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4/11 \\ 0 & 1 & 0 & 12/11 \\ 0 & 0 & 1 & 45/11 \end{bmatrix}$$

Sistema compatible determinat

x = -4/11
y = 12/11
z = 45/11

Donat que formen un sistema compatible determinat, la recta i el pla es tallen en el punt de coordenades

$$(-\frac{4}{11},\frac{12}{11},\frac{45}{11})$$

3. Considera les rectes

$$r:\begin{cases} x = z \\ y = 1 \end{cases} \qquad r':\frac{x-1}{2} = y-1 = \frac{z-1}{a}$$

on a és una constant. Comprova que aquestes dues rectes són secants per a qualsevol valor de a i determina el valor de a per tal que siguin perpendiculars

Si substituïm x=z i y=1 en la recta r' obtenim

$$\frac{x-1}{2} = 0 = \frac{z-1}{a}$$

de solucions x=1, y=1 i z=1. És el punt de tall de les dues rectes, són sempre rectes secants
El vector director de la primera resta és (1,0,1) i el vector director de la segona (2,1,a). Si han de ser restes perpendiculars el producte escalar d'aquests vectors ha de ser zero

$$(1,0,1)\bullet(2,1,a) = 2 + a = 0 \Rightarrow a = -2$$

4. Comprova que les rectes

$$r: x-1=y=z-2 \qquad s:\begin{cases} x-z=5 \\ y-z=2 \end{cases}$$

son paral·leles i escriu l'equació del pla que les conté

La recta r passa per (1,0,2) i té de vector director $\vec{v}=(1,1,1)$

La recta r' la podem escriure en funció de z com grau de llibertat de la manera

$$\begin{cases} x=5+z \\ y=2+z \\ z=z \end{cases}$$

aleshores aquesta recta passa per (5,2,0) i té de vector director $\vec{w}=(1,1,1)$

Els vectors directors són el mateix, les rectes són paral·leles

El pla que conté les dues rectes pot definir-se per un punt, per exemple (5,2,0), el vector director de les dues rectes $\vec{v}=(1,1,1)$, i un segon vector director que podem formar prenent com origen un punt de la recta r (1,0,2) i com extrem un punt de la recta r' (5,2,0), aquest segon vector és $\vec{u}=(4,2,-2)$. L'equació del pla serà

$$\begin{vmatrix} x-5 & 1 & 4 \\ y-2 & 1 & 2 \\ z & 1 & -2 \end{vmatrix}=0$$

si desenvolupem el determinant tenim

$$2x-3y+z-4=0$$

5. Escriu l'equació de la recta que passa per l'origen de coordenades i és paral·lela a la recta

$$\begin{cases} 3x-2y+3z=5 \\ 4x-y+z=7 \end{cases}$$

Busquem el vector director de la recta r

$$\begin{cases} 3x-2y+3z=5 \\ 4x-y+z=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x-2y=5-3z \\ 4x-y=7-z \end{cases}$$

si resolem en funció de z

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 5-3z & -2 \\ 7-z & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{z+9}{5}=\frac{9}{5}+\frac{1}{5}z$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 5-3z \\ 4 & 7-z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{9z+1}{5}=\frac{1}{5}+\frac{9}{5}z$$

L'equació de la recta és, en forma paramètrica

$$\begin{cases} x=\frac{9}{5}+\frac{1}{5}z \\ y=\frac{1}{5}+\frac{9}{5}z \\ z=z \end{cases}$$

és una recta de vector director $\vec{v} = \left(\frac{1}{5}, \frac{9}{5}, 1\right) = (1,9,5)$ i que passa per $A = \left(\frac{9}{5}, \frac{1}{5}, 0\right)$

6. Sigui r la recta d'equació

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

troba l'equació cartesiana del pla que conté la recta r i és perpendicular al pla y=0

El feix de plans que contenen r és

$$\lambda\,(x + y - z) + \mu\,(2x + y - 2z) = 0 \quad \Rightarrow (\lambda + 2\mu)x + (-\lambda + \mu)y + (\lambda - 2\mu)z = 0$$

el pla y=0 té de vector perpendicular (0,1,0). El producte escalar d'aquest vector pel vector normal al pla del feix ha de ser zero

$$(\lambda + 2\mu, -\lambda + \mu, -2\mu) \bullet (0,1,0) = -\lambda + \mu = 0$$

d'on $\lambda = \mu$ i el pla és

$$\lambda\,(x + y - z) + \lambda\,(2x + y - 2z) = 0 \quad \Rightarrow \lambda\,(3x - z) = 0 \Rightarrow 3x - z = 0$$

Una segona manera de fer aquest exercici és buscar dos punts de la recta r resolent el sistema

$$r : \begin{cases} x - y = -z \\ 2x + y = 2z \end{cases}$$

calculem x i y en funció de z

$$x = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} -z & -1 \\ 2z & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}z \quad ; \quad y = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & -z \\ 2 & 2z \end{vmatrix} = \frac{4}{3}z$$

fent z=0 i z=3 obtenim dos punts de r A=(0,0,0) i B=(1,4,3). El pla buscat passa per (0,0,0) i té de vectors director (1,4,3) ja que conté la recta i (0,1,0) ja que és perpendicular al pla y=0. La seva equació és

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 4 & 1 \\ z & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow z - 3x = 0$$

7. Troba les equacions de la recta que passa pel punt P(-1,0,0) i és paral·lela als plans

$$\pi_1 : 2x - y - z + 1 = 0 \qquad \pi_2 : x + 3y + z = 5$$

El sistema format per les equacions dels dos plans és la recta

$$\begin{cases} 2x - y - z = -1 \\ x + 3y + z = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = -1 + z \\ x + 3y = 5 - z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{7}\begin{vmatrix} -1 + z & -1 \\ 5 - z & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{7}(-3 + 3z + 5 - z) = \frac{1}{7}(2z + 2) \\ y = \frac{1}{7}\begin{vmatrix} 2 & -1 + z \\ 1 & 5 - z \end{vmatrix} = \frac{1}{7}(10 - 2z + 1 - z) = \frac{1}{7}(-3z + 11) \\ z = z \end{cases}$$

La recta té de vector director $\vec{v} = \left(\frac{2}{7}, -\frac{3}{7}, 1\right) = (2, -3, 7)$

La recta que busquem té el mateix vector director i passa per (-1,0,0). La seva equació contínua és

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z}{7}$$

8. Considera l'equació

$$(x+y+z)^2+(3x-y+2z-1)^2=0$$

dóna una interpretació geomètrica dels punts P(x,y,z) que verifiquin aquesta equació. No cal desenvolupar els quadrats

Tenim una suma de dos termes no negatius (ja que són quadrats) que ha de ser zero, aleshores cada un d'aquests termes ha de ser zero. Podem escriure

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 3x-y+2z-1=0 \end{cases}$$

Són les equacions de dos plans no paral·lels que es verifiquen alhora. És l'equació d'una recta

9. Calcula els valors de m i n per tal que el pla

$$\pi : nx+my-z-2=0$$

contingui la recta

$$r:\begin{cases} 2x-y-3=0 \\ x+z=4 \end{cases}$$

Les tres equacions han de formar un sistema compatible indeterminat amb un grau de llibertat. Si analitzem el sistema

$$\begin{cases} x+z=4 \\ 2x-y=3 \\ nx+my-z=2 \end{cases}$$

obtenim

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ n & m & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -m & n+1 & 4n-2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2m+n+1 & 5m+4n-2 \end{pmatrix}$$

el sistema serà compatible indeterminat quan

$$\begin{cases} 2m+n+1=0 \\ 5m+4n-2=0 \end{cases}$$

si resolem obtenim n=3 i m=-2

10. Troba l'equació de la recta projecció ortogonal de

$$r:\begin{cases} x-2y+5z=9 \\ -2x+3y+z+3=0 \end{cases}$$

sobre el pla d'equació

$$2x+2y-z+6=0$$

El feix de plans que contenen r és

$$\lambda\,(x-2y+5z-9)+\mu\,(-2x+3y+z+3)=0$$

el vector associat d'aquest feix de plans és

$$\lambda\,(x-2y+5z-9)+\mu\,(-2x+3y+z+3)=(\lambda-2\mu)x+(-2\lambda+3\mu)y+(5\lambda+\mu)z-9\lambda+3\mu=0$$

$$\vec{w}=(\lambda-2\mu\,,-2\lambda+3\mu\,,5\lambda+\mu)$$

i ha de ser perpendicular al vector associat al pla $\vec{v}=(2,2,-1)$

El seu producte escalar dóna una relació entre el paràmetres

$$(\lambda-2\mu\,,-2\lambda+3\mu\,,5\lambda+\mu)\bullet(2,2,-1)=2\lambda-4\mu-4\lambda+6\mu-5\lambda-\mu=0$$

$\mu = 7\lambda$

és el pla del feix

$$-13x + 19y + 12z + 12 = 0$$

i la recta buscada

$$\begin{cases} -13x + 19y + 12z + 12 = 0 \\ 2x + 2y - z + 6 = 0 \end{cases}$$

11. Escriu l'equació del pla perpendicular a la recta que passa pels punts P(2,-1,3) i Q(-3,1,-2) i que conté el punt mitjà del segment PQ

Calculem el vector d'origen P i final Q

$$\overrightarrow{PQ} = (-5, 2 - 5)$$

el punt mitjà del segment serà

$$A = P + \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} = (2,-1,3) + \frac{1}{2}(-5, 2 - 5) = \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$$

Els coeficient de l'equació del pla han de ser els components del vector perpendicular $\overrightarrow{PQ}$ i ha de passar per A

$$-5x + 2y - 5z + D = 0$$

i calculem el terme independent D

$$-5\left(-\frac{1}{2}\right) + 2 \cdot 0 - 5\left(\frac{1}{2}\right) + D = 0 \Rightarrow D = 0$$

Aleshores l'equació del pla és

$$-5x + 2y - 5z = 0$$

12. Considera una recta r d'equacions

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$$

i el pla π d'equació

$$A''x + B''y + C''z + D'' = 0$$

digues què significa geométricament que el sistema que s'obté considerant les tres equacions sigui incompatible. Digues què significa geométricament que aquest sistema sigui compatible determinat o indeterminat

Si el sistema és incompatible, la recta i el pla no tenen punts comuns i són paral·lels
Si el sistema és compatible determinat, la recta i el pla tenen un únic punt comú (una solució del sistema) i es tallen en un punt
Si el sistema és compatible indeterminat, la recta i el pla tenen infinits punts comuns i la recta està continguda en el pla

13. Determina si la recta

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+1}{5}$$

i el pla $3x + 2y + 5 = 0$ són paral·lels. Es troba la recta continguda en el pla?

Analitzem el sistema format per

$$\begin{cases} -3x + 9 = 2y - 2 \\ 5x - 15 = 2z + 2 \\ 3x + 2y + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x - 2y = -11 \\ 5x - 2z = 17 \\ 3x + 2y = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 & -11 \\ 5 & 0 & -2 & 17 \\ 3 & 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cccc} -3 & -2 & 0 & -11 \\ 5 & 0 & -2 & 17 \\ 3 & 2 & 0 & -5 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} [1] \\ -3[2]-5[1] \\ -3[3]-3[1] \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc} -3 & -2 & 0 & -11 \\ 0 & 10 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 48 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} [1] \\ [2] \\ [3] \end{array}$$

El sistema és incompatible. La recta i el pla són paral·leles i la recta no està continguda en el pla

14. Considera la recta r que té com equacions

$$\begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = 6 + \lambda \end{cases}$$

i la r' que té com a equacions

$$x - 1 = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{2}$$

Comprova que les dues rectes s'encreuen. Dóna les coordenades d'un punt P de r i un punt Q de r' que verifiquin la condició que la recta PQ sigui la perpendicular comuna a r i a r'

Els vectors directors de les dues rectes són diferents, la primera recta té de vector director (1,1,1) i la segona (1,2,2); les rectes no són paral·leles ni coincidents.

Si les dues rectes es tallessin hauria d'existir un valor del paràmetre λ que verifiqués

$$3 + \lambda - 1 = \frac{4 + \lambda - 1}{2} = \frac{6 + \lambda - 1}{2}$$

però això és impossible; de la primera igualtat

$$2 + \lambda = \frac{3 + \lambda}{2} \quad \Rightarrow 4 + 2\lambda = 3 + \lambda \quad \Rightarrow \lambda = -1$$

i de la segona

$$\frac{3 + \lambda 1}{2} = \frac{5 + \lambda 1}{2} \quad \Rightarrow 3 = 5$$

Aleshores les rectes es creuen

Si escrivim l'equació de la segona recta en forma paramètrica

$$x - 1 = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{2} \quad \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 1 + 2\mu \\ z = 1 + 2\mu \end{cases}$$

Un punt P de la primera recta serà de la forma $\begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = 6 + \lambda \end{cases}$ i de la segona Q $\begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 1 + 2\mu \\ z = 1 + 2\mu \end{cases}$, un vector d'extrem P i final Q té de components

$$(2 + \lambda - \mu, 3 + \lambda - 2\mu, 5 + \lambda - 2\mu)$$

i el producte escalar d'aquest vector amb els vectors directors de cada recta ha se ser zero. Podem escriure

$$(2 + \lambda - \mu, 3 + \lambda - 2\mu, 5 + \lambda - 2\mu) \bullet (1,1,1) = 10 + 3\lambda - 5\mu = 0$$

$$(2 + \lambda - \mu, 3 + \lambda - 2\mu, 5 + \lambda - 2\mu) \bullet (1,2,2) = 18 + 5\lambda - 9\mu = 0$$

Calculem els valors de λ i μ en aquestes equacions i obtenim

$$\lambda = 0 \,;\, \mu = 2$$

els punts P i Q són (3,4,6) de la recta r quan $\lambda = 0$, i (3,5,5) de la recta r' quan $\mu = 2$

15. Donada la recta

$$r:\begin{cases} 2x+(a-5)y-2z=3a-13 \\ ay-2z=3a \end{cases}$$

determina a per tal que existeixi un pla que contingui aquesta recta i que sigui perpendicular al vector $\vec{v}=(1,1,1)$. Escriu l'equació cartesiana d'aquest pla

Si el pla és perpendicular a (1,1,1) té d'equació

$$x+y+z+d=0$$

i si aquest pla conté la recta r han de formar un sistema d'equacions compatible indeterminat

$$\begin{cases} x+y+z=-d \\ 2x+(a-5)y-2z=3a-13 \\ ay-2z=3a \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -d \\ 2 & a-5 & -2 & 3a-13 \\ 0 & a & -2 & 3a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -d \\ 0 & 7-a & 4 & -2d-3a+13 \\ 0 & a & -2 & 3a \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -d \\ 0 & 7-a & 4 & -2d-3a+13 \\ 0 & 0 & 2a+14 & 14d+56 \end{pmatrix}$$

si

$$2a+14=0 \Rightarrow a=-14$$

i si

$$14d+56=0 \Rightarrow d=-4$$

l'equació del pla és

$$x+y+z-4=0$$

16. Determina k per tal que existeixi un pla que contingui la recta

$$\begin{cases} x-2y-6z=1 \\ 2x-2y-3z=6 \end{cases}$$

i que sigui perpendicular al vector (-6,8,k)

El pla té d'equació

$$-6x+8y+kz+d=0$$

si ha de contenir la recta forma amb les seves equacions un sistema compatible determinat

$$\begin{cases} x-2y-6z=1 \\ 2x-2y-3z=6 \\ -6x+8y+kz+d=0 \end{cases} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 & 1 \\ 2 & -2 & -3 & 6 \\ -6 & 8 & k & -d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 & 1 \\ 0 & -2 & -9 & -4 \\ 0 & -4 & -36+k & 6-d \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 & 1 \\ 0 & -2 & -9 & -4 \\ 0 & 0 & 18-k & -14+d \end{pmatrix}$$

d'on k=18 i d=14. L'equació del pla és

$$-6x+8y+18z+14=0 \Rightarrow -3x+4y+9z+7=0$$

17. Discuteix la posició relativa dels plans

$$\pi_1: ax+y+az=0$$

$$\pi_2: (a+3)x+\left(\frac{1}{a}\right)y+z=1$$

segons els valors de $a \neq 0$

Analitzem el sistema format per les equacions dels dos plans

$$\begin{pmatrix} a & 1 & a & 0 \\ a+3 & \frac{1}{a} & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & 1 & a & 0 \\ 0 & a+2 & a^2+2a & -a \end{pmatrix}$$

si a=-2 formen un sistema incompatible, els plans són paral·lels

$$\pi_1: -2x+y-2z=0$$

$$\pi_2: x-\left(\frac{1}{2}\right)y+z=1$$

si a és diferent de zero i de -2 els dos plans es tallen i formen una recta

18. Sigui el punt $P_1(1,0,-1)$, P_2 el punt simètric de P_1 respecte del pla d'equació $x-2y=0$ i P_3 el simètric de P_2 respecte del pla d'equació $x+2y+z=1$. Troba l'equació general del pla que determinen els punts P_1, P_2 i P_3

El pla ve determinat pel punt P(1,0,-1) i té de vectors directors els vectors perpendiculars als dos plans $\vec{v}=(1,-2,0)$ i $\vec{w}=(1,2,1)$. La seva equació és

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ y & -2 & 2 \\ z+1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2x-y+4z+6=0$$

19. Troba a i b per tal que els plans següents passin per una mateixa recta

$$\pi: x+2y-z=1$$

$$\pi': 2x+y+az=0$$

$$\pi'': 3x+3y-2z=b$$

El sistema ha de ser compatible indeterminat

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & a & 0 \\ 3 & 3 & -2 & b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2-a & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 3-b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2-a & 2 \\ 0 & 0 & -1-a & -1-b \end{pmatrix}$$

aleshores a=-1 i b=1. La recta és

$$\begin{cases} x+2y-z=1 \\ 2x+y-z=0 \end{cases}$$

20. Hi ha algun valor de k pel qual els quatre plans tinguin un punt en comú? Si és així troba aquest punt

$$\pi: x+2y-3=0$$

$$\pi': 3x+y+z=-1$$

$$\pi'': 2y-z+2=0$$

$$\pi''': x-y+kz+5=0$$

El sistema format per les equacions dels quatre plans ha de ser compatible determinat

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & -1 & -2\\ 1 & -1 & k & -5\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 5 & 10\\ 0 & 2 & -1 & -2\\ 0 & 1 & 2-k & 8\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 5 & 10\\ 0 & 0 & 9 & 18\\ 0 & 0 & 7-k & 18\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 5 & 10\\ 0 & 0 & 9 & 18\\ 0 & 0 & 0 & 2+k\end{pmatrix}$$

El sistema serà compatible determinat quan k=-2

El punt és la solució del sistema

$$z = 2$$
$$y = 0$$
$$x = -1$$

21. Considera la recta

$$r:\begin{cases}x-y-3z=1\\ x-3y+z=5\end{cases}$$

Digues si el punt (6,2,2) es troba en la recta paral·lela a r que passa per l'origen de coordenades

Calculem l'equació de la recta paral·lela que passa per l'origen.

$$r:\begin{cases}x-y-3z=1\\ x-3y+z=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-y=1+3z\\ x-3y=5-z\end{cases}$$

Resolent x i y en funció de z

$$x=-\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1+3z & -1\\ 5-z & -3\end{vmatrix}=5z-1$$

$$y=-\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & 1+3z\\ 1 & 5-z\end{vmatrix}=2z-2$$

L'equació de la recta, en paramètriques, és

$$\begin{cases}x=5z-1\\ y=2z-2\\ z=z\end{cases}$$

Una recta paral·lela que passi per l'origen serà

$$\begin{cases}x=5z\\ y=2z\\ z=z\end{cases}$$

Si aquesta recta conté el punt (6,2,2) ha de ser

$$\begin{cases}x=5z=6\\ y=2z=2\\ z=z=2\end{cases}$$

Aquestes equacions són incompatibles, obtenim, de la tercera, z=2, però de la segona z=1 i de la primera $z=\frac{6}{5}$. El punt no pertany a la recta

22. Explica la relació que hi ha entre el vector associat a un pla i un vector director d'una recta perpendicular a aquest. Troba l'equació del pla que conté el punt (1,1,0) i és perpendicular a la recta

$$r:\begin{cases}x+y-2z+1=0\\ 2x-y+z-1=0\end{cases}$$

El vector associat a un pla coincideix amb el vector director d'una recta perpendicular al pla.
Calculem primer el vector director de la recta r

$$r:\begin{cases} x+y-2z+1=0 \\ 2x-y+z-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=2z-1 \\ 2x-y=1-z \end{cases}$$

resolem en funció de z

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 2z-1 & 1 \\ 1-z & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{z}{3} \quad ; \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2z-1 \\ 2 & 1-z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{5z-1}{3}$$

El vector director de la recta és $\vec{v}=\left(\frac{1}{3},\frac{5}{3},1\right)\rightarrow(1,5,3)$

L'equació del pla perpendicular ha de tenir com coeficients els components d'aquest vector. Ha de ser

$$x+5y+3z+D=0$$

Calculem el terme independent D fent que el pla passi per (1,1,0)

$$1+5+D=0 \quad \Rightarrow \quad D=-6$$

i l'equació del pla és

$$x+5y+3z-6=0$$

23. Estudia la posició relativa de les rectes r i r'

$$r:\frac{2x-1}{4}=\frac{4y-1}{2}=z$$

$$r':\begin{cases} 3x-y+3z=0 \\ x+4y+z=0 \end{cases}$$

Analitzem el sistema format per quatre equacions, dues de la primera recta i les dues dels dos plans que defineixen la segona recta

$$\begin{cases} 2x-1=4z \\ 4y-1=2z \\ 3x-y+3z=0 \\ x+4y+z=0 \end{cases}$$

Analitzem la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 13 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 6 & -1 \\ 0 & 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Dividim la segona fila per 13

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 6 & -1 \\ 0 & 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Formen un sistema incompatible, les rectes no tenen cap punt comú, es creuen

24. Considera la recta

$$r:\begin{cases}3x-y+2z-1=0\\ x+4y-z-b=0\end{cases}$$

i el pla

$$\pi : 2x-5y+az+2=0$$

Determina els valors de a i b per tal que

d) r i π siguin secants. Troba el punt d'intersecció

e) r i π siguin paral·lels

f) la recta r estigui continguda en el pla π

Analitzem el sistema format per les tres equacions

$$\begin{pmatrix}1 & 4 & -1 & b\\ 3 & -1 & 2 & 1\\ 2 & -5 & a & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 4 & -1 & b\\ 0 & 13 & -5 & 3b-1\\ 0 & 13 & -2-a & 2b+2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 4 & -1 & b\\ 0 & 13 & -5 & 3b-1\\ 0 & 0 & -3+a & b-3\end{pmatrix}$$

Els valors crítics són a=3 i b=3

Si a=3 i b=3 formen un sistema compatible indeterminat amb un grau de llibertat, la recta està continguda en el pla

Si a=3 i b≠3 formen un sistema incompatible. La recta i el pla es creuen, no tenen punts comuns

Si a≠3 i b=3 i quan a≠3 i b≠3 formen un sistema compatible determinat. La recta i el pla tenen un punt en comú, són secants