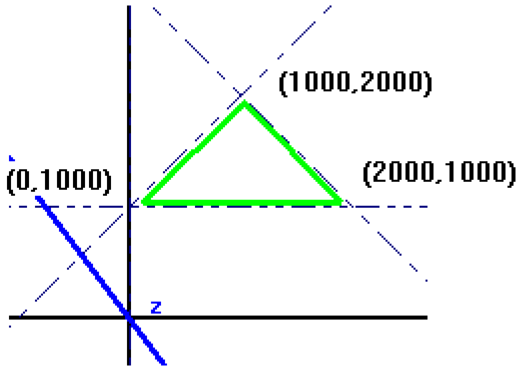
Programació lineal

1. Una empresa fabrica dues classes de cargols A i B. En la producció diària se sap que el nombre de cargols de la classe B no supera els de la classe A més 1000 unitats, que entre les dues classes no superen les 3000 unitats i que els de la classe B no baixen de 1000 unitats. Sabent que els cargols de la classe A valen 0,2 € i els de la classe B 0,15 €, calculeu el valor de la producció màxima i mínima i el nombre de cargols de cada una de les classes.

Si x són els cargols tipus A i y els cargols tipus B la funció que s'ha de maximitzar és la que dóna el benefici z=20x+15y. El conjunt de restriccions és:

$$\begin{cases} x > 0 \\ y < x + 1000 \\ x + y < 3000 \\ y > 1000 \end{cases}$$

el conjunt de solucions ve determinat per la regió



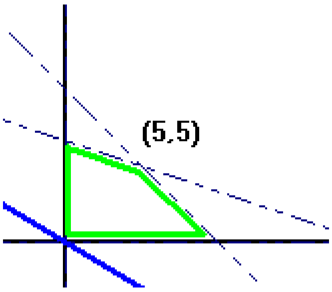
El valor màxim correspon a (2000,1000) de valor 550. Cal fabricar 2000 cargols tipus A i 1000 cargols tipus B. El benefici serà de 550

2. Les 20 noies i els 10 nois d'un mateix curs fan una feina a les tardes i els contracten de dues maneres diferents: Per parelles d'una noia i un noi i per equips de tres noies i un noi. Els paguen la parella a 30 €/tarda i l'equip a 50 €/tarda. De quina manera cal ser contractats per guanyar el màxim possible?

Si x són els equips formats per un noi i una noia, i y són els equips format per un noi i tres noies, la funció que dóna el benefici que s'obté és z=30x+50y . Les restriccions que han de complir x i y són:

$x \geq 0 \quad y \geq 0$	Han de ser positius el nombre d'equips formats
$x + y \leq 10$	Hi ha 10 nois, un a cada equip x i un a cada equip y
$x + 3y \leq 20$	Hi ha 20 noies, una a cada equip x i 3 a cada equip y

La regió factible té el màxim en el punt (5,5) de valor 400. El màxim benefici és de 400 € amb 5 parelles x i 5 equips y

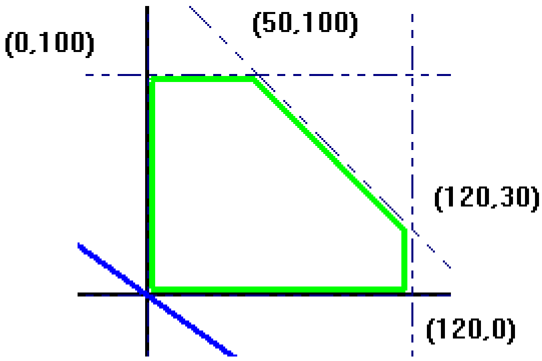


3. Un estudiant dedica part del seu temps lliure a repartir propaganda publicitària. L'empresa A li paga 5 cen per cada imprès repartit i l'empresa B, amb fulletons més grans, 7 cen per cada un. L'estudiant porta dues bosses, una per impresos tipus A, on n'hi caben 120, i altre per els de tipus B, on n'hi caben 100. Calcula que cada dia pot repartir un màxim de 150 fulletons entre els de tipus A i B. Calculeu quants n'ha de repartir de cada classe per guanyar el màxim possible.

Els beneficis els dóna la funció z=5x+7y, en cèntims d'€ on x i y són, respectivament, els fulletons repartits del tipus A i B. Les restriccions que han de verificar venen donades en el sistema d'equacions

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 120 \\ 0 \leq y \leq 100 \\ x + y \leq 150 \end{cases}$$

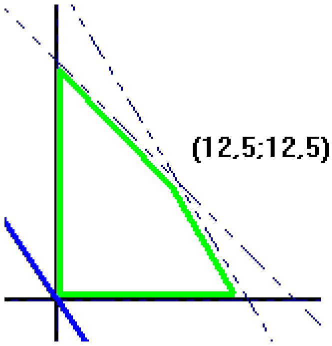
La regió factible i el valor màxim són:



El màxim valor és 9,50 € i s'assoleix en el punt (50,100).

4. Un camioner disposa de 2000 € pot carregar el seu camió amb 25 tm de pomes i taronges. El cost de cada tona de pomes és de 100 € i ell les vendrà a 130, el cost de cada tona de taronges és de 60 € i ell les vendrà a 80 €. Calculeu com ha de carregar el camió per obtenir el màxim benefici

El benefici que obté el camioner depèn de la diferència de preus de compra i de venda de cada article. Si x són les tones de pomes i y les de taronges, la funció z=30x+20y dóna el benefici. Les restriccions que han de complir les tones de pomes i taronges que compra són x+y<25, ja que la càrrega del camió és de 25 tones, i 100x+60y<2.000 ja que té 2.000 € per carregar el seu camió. També, evidentment, x>0 i y>0. La regió factible és



El màxim està en el punt (12,5;12,5) que correspon a un benefici de 625 €.

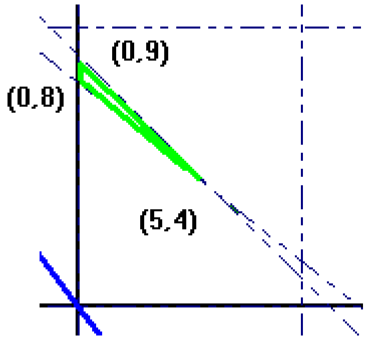
5. Una escola vol dur d'excursió 400 alumnes. L'empresa de transport disposa de 8 autocars de 40 places i de 10 de 50 places, però només té 9 conductors. Llogar un autocar gran costa 800 € i un de petit 600 €. Calculeu els autocars de cada tipus que ha de llogar l'escola si vol que l'excursió resulti econòmica.

Si x i y són, respectivament, els autocars petits i grans que l'escola ha de contractar, el problema és minimitzar la funció z=6x+8y que dóna el cost del lloguer dels autocars en milers de pts.

Les restriccions són:

$0 \le x \le 8$	Té 8 autocars petits
$0 \le y \le 10$	Té 10 autocars grans
$x + y \le 9$	Disposa de 9 conductors
$40x + 50y \ge 400$	Ha de transportar 400 alumnes

Determina la regió limitada per (0,9), (0,8) i (5,4) que corresponen a llogar 9 o 8 autocars grans i llogar 5 autocars petits i 4 grans.



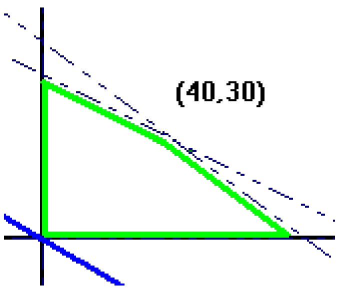
El mínim de la funció és el punt (0,8) i el cost 48 milers de pts.

6. En un magatzem hi ha 100 caixes del tipus A i 100 del tipus B. La taula informa del pes, el volum i el valor de cadascuna

tipus	pes (kg)	volum (dm^3)	valor (€)
A	100	30	75
B	200	40	125

Una camioneta pot carregar 1000 kg i un volum màxim de 2400 dm^3. Troba com ha de carregar-la per fer que el valor de les caixes sigui el més gran possible.

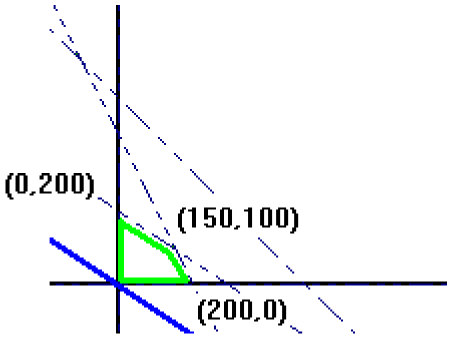
La funció que s'ha de maximitzar és el valor de les caixes que transporta la camioneta. És la funció $z=75x+125y$. Si el pes no ha de superar 10.000 kg podem formar la inequació $100x+200y<10.000$, i si el volum no ha de superar 2.400 dm^3 escrivim la inequació $30x+40y<2400$. La regió factible és:



I el valor màxim és 6810 € si es carreguen 40 caixes del primer tipus i 30 del segon

7. Al començament del curs uns grans magatzems fan una oferta de material escolar. Tenen en estoc 600 llibretes, 500 carpetes i 400 bolígrafs. Fan dos tipus de lots: el primer de dues llibretes, una carpeta i dos bolígrafs i el segon de tres llibretes, una carpeta i un bolígraf. El primer lot el venen a 2,5 € i el segon a 3,75 €. Calculeu els lots de cada classe que han de preparar si volen el màxim benefici.

Si x i y són els lots que fan els magatzems, el benefici és z=2,5x+3,75y. Les restriccions venen per la quantitat de materials que formen part de cada tipus de lot: Les 600 llibretes determinen 2x+3y<600; les 500 carpetes: x+y<500 i els 400 bolígrafs 2x+y<400.



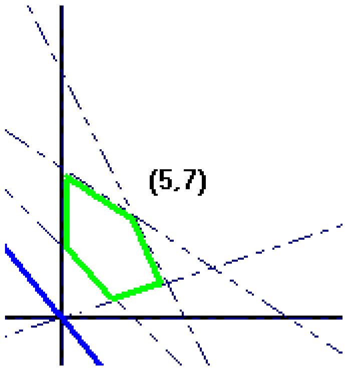
Cal observar que la inequació x+y<500 és la menys representativa ja que està fora de la regió factible. És la restricció menys forta. En els vèrtexs els valors del benefici són: en (0,200) 750 €, en (150,100) també 750 € i en (200,0) 500 €. El màxim està en el segment que uneix els punts (0,200) i (150,100).

8. Un artesà fabrica dos tipus de peces A i B. Cada peça A requereix 6 hores de muntatge i 10 de pintura, mentre que cada peça B 9 hores de muntatge i 5 de pintura. Està disposat a treballar com a màxim 93 hores mensuals en el muntatge i 85 en la de pintura. Cada peça A la ven a 50 € i cada peça B a 40 € però ha de vendre un mínim de 5 peces mensuals, A o B i la quantitat de peces A no ha de superar el triple de les peces B. Calculeu quantes n'ha de fabricar de cada classe.

La funció objectiva és z=50x+40y . Les restriccions són:

$6x+9y\le 93$	Les hores de muntatge
$10x+5y\le 85$	Les hores de pintura
$x+y\ge 5$	Un mínim de 5 peces mensuals
$x\le 3y$	Les peces A no superen el triple de B

La regió factible



I el màxim està en (5,7), de valor 530 €.

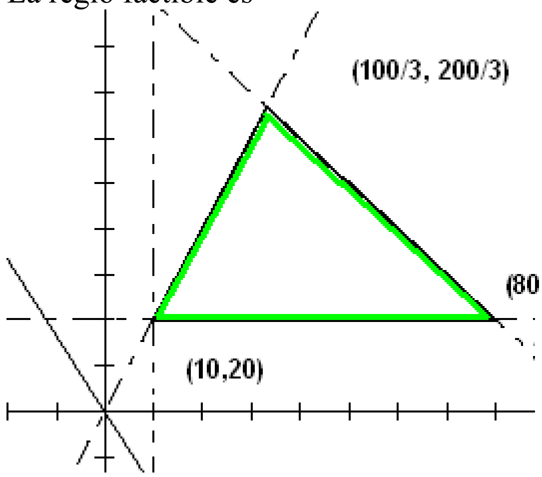
9. Informes reservats del partit polític M.C.C. (Matemàtics a Casa i Callats) senyalen que per cada milió que subvencionen al Departament de Benestar Vegetal guanyen 100 vots, i per cada milió destinat al Departament de Cagatió i Afers Nadalencs en guanyen 60. Tenen 100 milions. Un dia que el seu candidat estava borratxo es va comprometre a invertir, almenys, 10 milions en el Departament de Benestar Vegetal. La propera vegada que se'l va deixar sol, la va tornar a agafar i va prometre 20 milions al Departament de Cagatió i Afers Nadalencs. Pressions dels moviments ecologistes fan que el Departament de Cagatió i Afers Nadalencs no hagi de tenir més del doble del Departament de Benestar Vegetal. Calculeu quina és la distribució políticament més convenient

Volem que sigui màxim el nombre de vots $z=100x+60y$, on x i y són les subvencions que reben els dos Departaments, x=BV i y=CAN

El conjunt de restriccions són

$x+y<100$	Tenen 100 milions
$x>10$	Almenys 10 milions al primer BV
$y>20$	Almenys 20 milions al segon CAN
$2x>y$	CAN menys del doble de BV

La regió factible és



El màxim s’assoleix en el punt (80,20) on z=9200

10. Un 4 d'octubre els ciutadans de Barcelona que sortien al carrer havien de portar dues roses blanques (una a cada mà) o una pilota de handbol (una amb les dues mans) per demostrar arreu del món la seva alegria. Cada rosa costava 400 pts i cada pilota 200 (eren de plàstic, de lluny no es veu). Pressions polítiques volien

que, almenys, es compressin 1.000 roses i consideraven que amb 4.000 ja n'hi havia prou, de pilotes. Si l'Ajuntament està disposat a gastar 2.000.000 de pts en aquesta operació d'imatge esportiva-floral, calculeu les roses i les pilotes que havien de posar a l'abast dels ciutadans si volien el màxim de gent al carrer. Calculeu també les persones que cridarien: "Vivan los novios", amb les mans així ocupades.

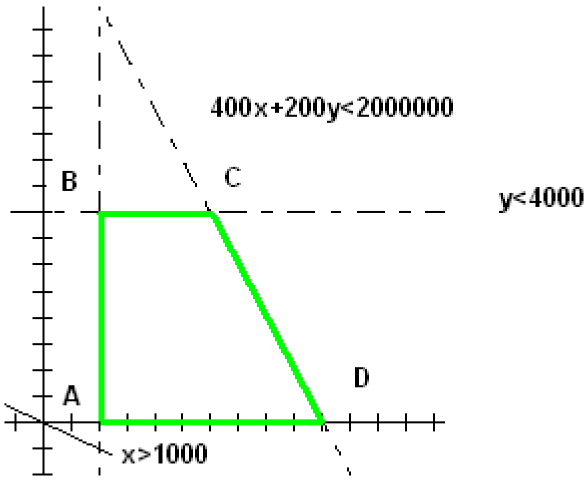
Siguin x les roses i y les pilotes. La funció que es vol maximitzar és el màxim de persones que depenen de la quantitat de roses i de pilotes. Per cada dues roses hi haurà una persona i per cada pilota una persona, aleshores z és

$$z = \frac{x}{2} + y$$

Les restriccions de x i y són

$$\begin{cases} 400x + 200y < 2000000 \\ x > 1000 \\ y < 4000 \end{cases}$$

La regió factible i els vèrtexs A, B, C i D són



A=(1000,0) z=500
B=(1000,4000) z=4500
C=(3000,4000) z=5500
D=(5000,0) z=2500
El màxim s'obté en el punt (3000,4000) i correspon a 5500 persones

11. Carta d'un restaurant xinès:

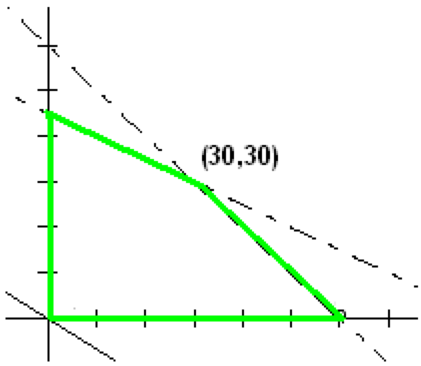
Menú Kin Tip	1 lacción lollito plimavela + 1 lacción celdo con almendlas	6 €
Menú Kin Tip Més Tip	1 lacción lollito plimavela + 2 laciones celdo con almendlas	9 €

Si tenen al rebost 60 racions "rollitos de primavera" i 90 racions "cerdo con almendras" calculeu els menús de cada classe que han de preparar per fer que sigui màxim el benefici

El benefici és la funció z=6x+9y i les restriccions

$$\begin{cases} x > 0, \quad y > 0 \\ x + y < 60 \\ x + 2y < 90 \end{cases}$$

La regió factible

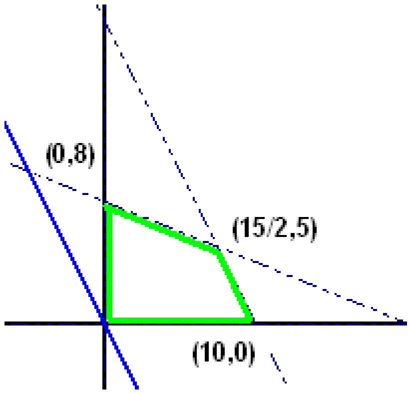


i el màxim s'assoleix en el punt (30,30)

12. La Blancaneus n'està fins les trenes de conviure amb aquests set petits homenets. Els ha de rentar la roba (no sabeu com l'embruten..) i fregar la casa. Fa servir 4 unitats de sabó per rentar una peça de roba i 2 unitats de sabó per fregar la casa (fa servir el mateix tipus de sabó, estava d'oferta, en va comprar 40). D'aigua en fa servir 8 l per cada peça i 20 l per fregar la casa (també fa servir la mateixa classe d'aigua, el dipòsit és de 160 litres). Per cada peça de roba que renta tenen el detall de portar-li dos rovellons del bosc, i un (només un, no hi ha dret..!) cada cop que frega la casa. A la Blancaneus li agraden molt els bolets. Calculeu com ho ha de fer per fer-se'n un tip.

Si x són les peces que renta de roba i y les que frega la casa, el benefici (en bolets) ve donat per z=2x+y. Les restriccions són

$$\begin{cases} x > 0 \quad y > 0 \\ 4x + 2y < 40 \\ 8x + 20y < 160 \end{cases}$$



en el punt $\left(\frac{15}{2},5\right)$ i en el punt (10,0) la funció objectiva assoleix el mateix valor z=20.

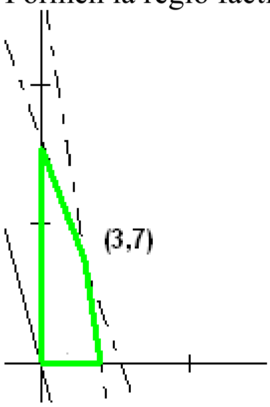
Aleshores el màxim de la funció objectiva són tots els punts del segment. Observem que aquest segment i la funció objectiva z són rectes paral·leles

13. L'empresa "Sua i Paga" del Solsonès organitza esports d'aventura. Té previst adquirir dos models de tracció 4x4: uns cotxes i uns ases. Té un local de 48 m^2 on ha d'encabir els cotxes i els ases. Cada cotxe ocupa 9 m^2 i casa ase 3 m^2. La companyia d'assegurances cobra una pòlissa a tercers de 1.000 € per cada ase i 7.000 per cada cotxe. La companyia no vol gastar-se més de 28.000 € en l'assegurança. Els estudis de mercat indiquen que els clients pagaran el lloguer d'un cotxe quatre vegades més car que el d'un ase. Calculeu els vehicles de cada mena que ha d'adquirir

El benefici serà z=4x+y, ja que paguen quatre vegades més per llogar un cotxe que un ase. El conjunt de les restriccions és

$$\begin{cases} x > 0; \quad y > 0 \\ 9x + 3y < 48 \\ 7x + y < 28 \end{cases}$$

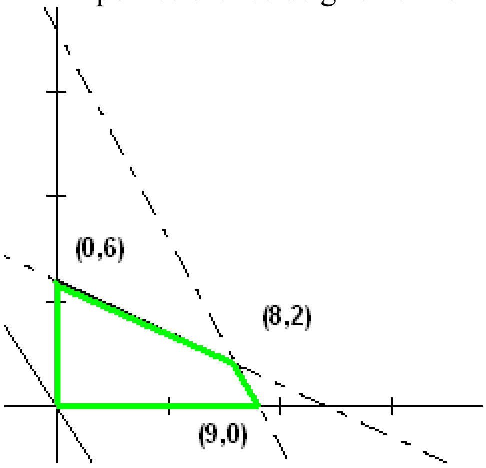
Formen la regió factible



El màxim benefici s'obté en el punt (3,7) que correspon a 3 cotxes i 7 ases.

14. La bruixa dolenta té 18 racions de cues de sargantana i 24 racions d'orelles de gat. Si vol fer una poció màgica d'enverinar princeses necessita 2 unitats de cues de sargantanes i altres 2 d'orelles de gat i les ven a 500 monedes d'or en el mercat. Fer una poció màgica per aprovar les matemàtiques és més complicat i necessita una unitat de cues de sargantana i 4 d'orelles de gat. Les ven a 300 monedes d'or. Calculeu les pocions de cada classe que li convé fer i les monedes d'or que guanyarà

S'ha d'obtenir el màxim de la funció $z=500x+300y$, que dóna les monedes d'or de benefici segons les pocions de cada tipus.
Les restriccions són $2x+y<18$ segons les cues de sargantanes que té, i de $2x+4y<24$ limitat per les orelles de gat. Formen la regió



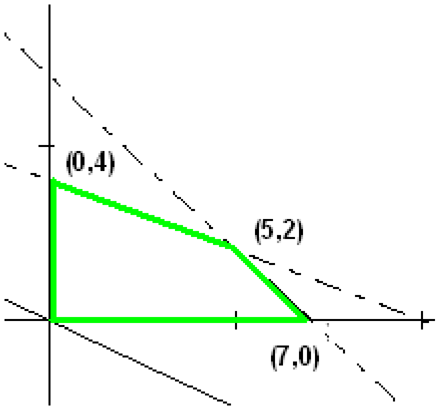
El valor de la funció objectiva en els vèrtex és
en (0,6) 1.800
en (8,2) 4.600
en (9,0) 4.500
El màxim valor són 4.500 monedes d'or quan fabrica 8 pocions dels primer tipus i 2 del segon

15. La Blancaneus ha decidit muntar una cooperativa amb els 7 nans. Uns faran d'animadors turístics del bosc, per entretenir els visitants, i altres de jardiners als xalets de la zona residencial. Ella tindrà cura de fer el menjar. Creu que els jardiners guanyaran el doble que els animadors. Cada jardiner s'emportarà 10 "bocatas" cada dia, i cada animador n'agafarà 4. Si la Blancaneus pot preparar 40 d'aquests meravellosos "bocatas" de sardines en llauna i rodanxes de cogombre amanides amb pebre i vinagre cada dia, calcula de quina manera ha de distribuir la feina (quants nans d'animadors i quants de jardiners) si vol guanyar el màxim

La funció objectiva és $z=x+2y$, x són els nans que fan d'animadors, que guanen el doble que y, els nans que fan de jardiners.
Les restriccions són

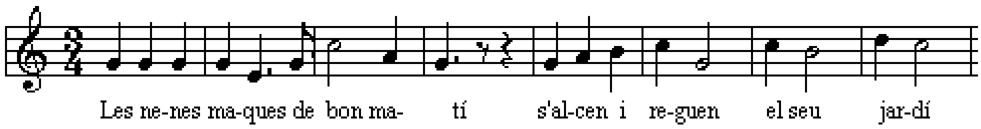
$x+y<7$	Donat que són 7 nans
$x>0$ $y>0$	No poden ser negatius
$4x+10y<40$	Els "bocatas" que pot fer

La regió factible és

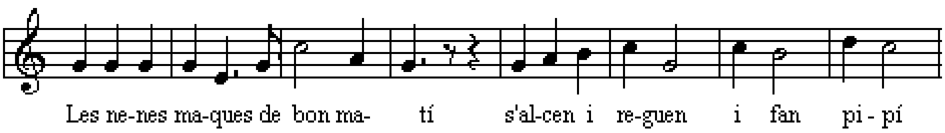


El màxim valor de la funció objectiva s'assoleix en el punt (5,2)

16. Les nenes maques (popular)



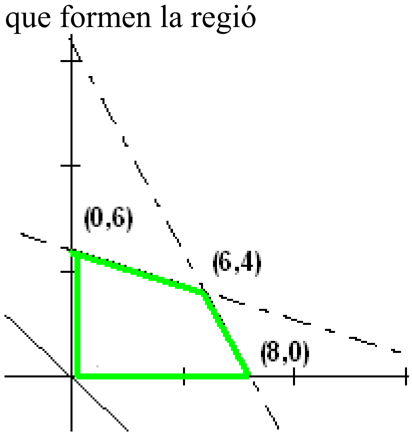
Volen plantar roses (Rosa pimpinellifolia) i clavells (Dianthus carthusianorum). Cada rosa necessita dues unitats d'aigua al dia, i cada clavell una cada dia. D'adob les roses en necessiten 1 unitat i els clavells 3. Tenen 16 unitats d'aigua i 18 unitats d'adob cada dia. Calcula les flors que poden plantar si volen que el jardí estigui ben florit.



Volem fer màxim la quantitat de flors z=x+y, amb les restriccions

$$\begin{cases} x > 0 \quad y > 0 \\ 2x + y < 16 \\ x + 3y < 18 \end{cases}$$

que formen la regió



La màxima quantitat de flors s'obté quan es planten 6 roses i 4 clavells