Mètriques en el pla

1 Calcula el mòdul dels vectors

$\vec{u}=(2,3)$ $\vec{v}=(6,9)$ $\vec{n}=(-3,2)$

$\vec{i}=(1,0)$ $\vec{j}=(0,1)$ $\vec{w}=(-4,7)$

$\vec{u}=(2,3)\Rightarrow\left|\vec{u}\right|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$

$\vec{v}=(6,9)\Rightarrow\left|\vec{v}\right|=\sqrt{6^2+9^2}=\sqrt{117}$

$\vec{n}=(-3,2)\Rightarrow\left|\vec{n}\right|=\sqrt{(-3)^2+2^2}=\sqrt{13}$

$\vec{i}=(1,0)\Rightarrow\left|\vec{i}\right|=\sqrt{1^2+0^2}=1=\left|\vec{j}\right|$

$\vec{w}=(-4,7)\Rightarrow\left|\vec{w}\right|=\sqrt{16+49}=\sqrt{65}$

2 Donats els vectors de l'exercici anterior, calcula els productes escalars següents

$\vec{u}\cdot\vec{v}$ $\vec{u}\cdot\vec{n}$ $\vec{u}\cdot\vec{i}$ $\vec{u}\cdot\vec{j}$ $\vec{u}\cdot\vec{w}$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=(2,3).(6,9)=12+27=39$

$\vec{u}\cdot\vec{n}=(2,3).(-3,2)=-6+6=0$

$\vec{u}\cdot\vec{i}=(2,3).(1,0)=2$

$\vec{u}\cdot\vec{j}=(2,3).(0,1)=3$

$\vec{u}\cdot\vec{w}=(2,3).(-4,7)=-8+21=13$

3 Busca l'angle que formen els vectors

a) $\vec{u}=(2,3)$ i $\vec{v}=(6,9)$

b) $\vec{u}=(2,3)$ i $\vec{n}=(-3,2)$

c) $\vec{u}=(2,3)$ i $\vec{i}=(1,0)$

d) $\vec{u}=(2,3)$ i $\vec{j}=(0,1)$

e) $\vec{u}=(2,3)$ i $\vec{w}=(-4,7)$

$$\cos A=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|}=\frac{39}{\sqrt{13}\sqrt{117}}=\frac{39}{39}=1;\quad\Rightarrow A=0$$

Els vectors són proporcionals, defineixen la mateixa direcció

$$\cos A=\frac{\vec{u}\cdot\vec{n}}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{n}\right|}=\frac{0}{\sqrt{13}\sqrt{13}}=0;\quad\Rightarrow A=90$$

Els vectors són perpendiculars, el seu producte escalar és zero

$$\cos A=\frac{\vec{u}\cdot\vec{i}}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{i}\right|}=\frac{2}{\sqrt{13}\sqrt{1}}=\frac{2}{\sqrt{13}}=0{,}5547;\quad\Rightarrow A=56^{\circ}18'36''$$

$$\cos A=\frac{\vec{u}\cdot\vec{j}}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{j}\right|}=\frac{3}{\sqrt{13}\sqrt{1}}=\frac{3}{\sqrt{13}}=0{,}8320;\quad\Rightarrow A=33^{\circ}41'24''$$

$$\cos A = \frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{|\vec{u}|.|\vec{w}|} = \frac{13}{\sqrt{13}\sqrt{65}} = \frac{13}{\sqrt{845}} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{65}} = 0{,}4472; \quad \Rightarrow A = 63^{o}26'6''$$

4 Calcula l'angle que formen aquestes rectes

a) $x - 2y + 4 = 0$; $3x - y - 1 = 0$

b) $2x - y = 3$; $2x + y = 1$

c) $\frac{x-3}{4} = \frac{y-1}{2}$; $y = 2x + 3$

d) $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2 - t \end{cases}$; $2x + y - 1 = 0$

e) $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3}$; $-3x + 2y = 4$

Hem de determinar el vector director de cada una d'elles. En el primer parell de rectes els vectors directors són (2,1) i (1,3). L'angle que formen

$$\cos A = \frac{2+3}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \Rightarrow \quad A = 45^{o}$$

El segon parell de rectes tenen de vectors directors (1,2) i (1,-2)

$$\cos A = \frac{|1-4|}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{3}{5}; \quad \Rightarrow A = 53^{o}7'48''$$

El tercer parell de rectes té de vectors directors (4,2) i (1,2)

$$\cos A = \frac{|4+4|}{\sqrt{20}\sqrt{5}} = \frac{8}{10}; \quad \Rightarrow A = 36^{o}56'11''$$

Les rectes d) tenen de vectors directors (1,-1) i (1,-2)

$$\cos A = \frac{1+2}{\sqrt{2}\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{10}} = 0{,}9487 \quad ;\Rightarrow A = 18^{o}26'6''$$

Les rectes e) tenen de vectors directors (2,3) i (2,3). És el mateix vector i l'angle que formen és de 0º

5 Busca els angles del triangle que té per vèrtexs A(-2,2), B(5,3) i C(2,15)

Busquem primer l'angle del vèrtex A. Formem els vectors $\overrightarrow{AB} = (7,1)$ i $\overrightarrow{AC} = (4,13)$ i calculem l'angle que formen

$$\cos A = \frac{28+13}{\sqrt{50}\sqrt{185}} = \frac{41}{\sqrt{9250}} = 0{,}4263 \quad ;\Rightarrow A = 64^{o}46'2''$$

per calcular l'angle B ens calen els vectors $\overrightarrow{BA} = (-7,-1)$ i $\overrightarrow{BC} = (-3,12)$. L'angle B és

$$\cos B = \frac{21-12}{\sqrt{50}\sqrt{153}} = \frac{9}{\sqrt{7650}} = 0{,}1029 \quad ;\Rightarrow B = 84^{o}5'38''$$

L'angle C el podem calcular formant els vectors $\overrightarrow{CA} = (-4,-13)$ i $\overrightarrow{CB} = (3,-12)$ i calculant l'angle que formen, o bé sabent que la suma dels tres angles del triangle ha de ser 180º

$$\cos C = \frac{-12+156}{\sqrt{185}\sqrt{153}} = \frac{144}{\sqrt{28305}} = 0{,}8559; \quad \Rightarrow C = 31^{o}8'20''$$

7. Busca els costats del triangle que té per vèrtexs A(-2,2), B(5,3) i C(2,15)

Hem calculat els vectors $\overrightarrow{AB}=(7,1)$, $\overrightarrow{AC}=(4,13)$ i $\overrightarrow{BC}=(-3,12)$. Els costats són el mòdul de cada un dels vectors. $\sqrt{50}$; $\sqrt{185}$ i $\sqrt{153}$

9. Busca la distància dels punts següents a les rectes donades

a) P(2,3) $r: 2x-3y+5=0$
b) Q(-1,3) $r: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+4}{3}$
c) R(2,-4) $r: \begin{cases} x=5+2t \\ y=3-t \end{cases}$

Apliquem
$$d=\frac{|2.2-3.3+5|}{\sqrt{4+9}}=\frac{0}{\sqrt{13}}=0$$
el punt P(2,3) pertany a la recta r
Convertim r en equació cartesiana
$$r: \frac{x-1}{2}=\frac{y+4}{3} \Rightarrow 3x-3=2y+8 \Rightarrow 3x-2y-11=0$$
i calculem la distància
$$d=\frac{|-3-6-11|}{\sqrt{4+9}}=\frac{20}{\sqrt{13}}$$
Transformem l'equació de la recta en cartesiana
$$r: \begin{cases} x=5+2t \\ y=3-t \end{cases} \Rightarrow \frac{x-5}{2}=\frac{y-3}{-1} \Rightarrow -x+5=2y-6 \Rightarrow x+2y-11=0$$
i calculem la distància
$$d=\frac{|2-8-11|}{\sqrt{1+4}}=\frac{17}{\sqrt{5}}$$

10 Calcula la distància entre el parell de rectes següents
a) $x-2y+4=0$; $3x-y-1=0$
b) $2x-y=3$; $2x+y=1$
c) $\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y-1}{2}$; $y=2x+3$
d) $\begin{cases} x=3+t \\ y=2-t \end{cases}$; $2x+y-1=0$
e) $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{3}$; $-3x+2y=4$

a) Les rectes no són paral·leles ja que els seus vectors directors no són proporcionals. Aleshores les rectes són secants i la seva distància és zero (Hi ha un punt comú a les dues)
b) Les rectes no són paral·leles, la seva distància és zero

c) Les rectes no són paral·leles, els vectors directors són (4,2) i (1,2). Es tallen en un punt. La seva distància és zero
d) El vector director de la primera és (2,3) i el de la segona també és (2,3). Son rectes paral·leles no coincidents. Per calcular la seva distància calculem un punt arbitrari de la primera, per exemple (1,4) i calculem la distància d'aquest punt a la segona recta –3x+2y-4=0

$$d=\frac{|-3+8-4|}{\sqrt{9+4}}=\frac{1}{\sqrt{13}}$$

11 Busca l'equació de la recta que passa pel punt P(-4,3) i que és perpendicular al vector $\vec{n}=(3,-2)$

El vector perpendicular al vector donat $\vec{n}=(3,-2)$ és, per exemple, (2,3), ja que el producte escalar d'aquests dos vectors és zero. L'equació buscada serà

$$\frac{x+4}{2}=\frac{y-3}{3}\Rightarrow 3x-2y+18=0$$

13 Determina el valor de a perquè les rectes $ax+(a-1)y-2(a+2)=0$ **i** $3ax-(3a+1)y-(5a+4)=0$ **siguin a) paral·leles b) perpendiculars**

El vector director de la primera és (a-1,-a) i el de la segona (3a+1,3a). Si les rectes han de ser paral·leles els vectors han de ser proporcionals

$$\frac{a-1}{3a+1}=\frac{-a}{3a}\Rightarrow 3a^2-3a=-3a^2-a\Rightarrow 6a^2-2a=0$$

que té de solucions $a=0$ i $a=\frac{1}{3}$

Si les rectes han de ser perpendiculars el producte escalar dels vectors directors ha de ser zero. Plantegem

$$(a-1,-a)\cdot(3a+1,3a)=3a^2-2a-1-3a^2=-2a-1=0\Rightarrow a=-\frac{1}{2}$$

14 Busca el valor de m perquè les rectes $mx+y=12$ **i** $4x-3y=m+1$ **siguin paral·leles i calcula la distància entre elles**

Les rectes tenen de vectors directors (1,-m) i (3,4). Si han de ser paral·leles aquests vectors han de ser proporcionals

$$\frac{1}{3}=\frac{-m}{4}\Rightarrow m=-\frac{4}{3}$$

Per aquest valor de m les rectes són

$$-\frac{4}{3}x+y=12\Rightarrow -4x+3y-36=0$$

i $4x-3y+\frac{1}{3}=0$. Busquem un punt de la primera, per exemple (0,12), i calculem la distància d'aquest punt a la segona

$$d = \frac{\left|-36+\frac{1}{3}\right|}{\sqrt{16+9}} = \frac{107}{15}$$

15 Busca l'equació de la mediatriu del segment determinat pels punts A(1,-2) i B(3,0) i l'angle que forma amb l'eix OX

El vector $\overrightarrow{AB} = (2,2)$. El punt M, mitjà del segment AB serà

$$M = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (1,-2) + (1,1) = (2,-1)$$

La recta que estem buscant passa per aquest punt i té un vector director perpendicular al vector $\overrightarrow{AB} = (2,2)$. Prenem com vector perpendicular el (1,-1) i l'equació és

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-1} \Rightarrow -x+2 = y+1 \Rightarrow x+y-1=0$$

El pendent d'aquesta recta mediatriu és –1. L'angle que forma amb l'eix OX serà

$$\tan A = -1 \quad \Rightarrow A = 135^{\circ}$$

17 Busca la distància del punt (-1,1) a la recta que talla els eixos OX i OY a les distàncies 3 i 4 de l'origen

La recta passa per (3,0) i (0,4). Té pendent $a = -\frac{4}{3}$. La seva equació serà, si passa per (0,4)

$$y = -\frac{4}{3}x + b \Rightarrow 4 = b \quad y = -\frac{4}{3}x + 4 \quad \Rightarrow 4x+3y-12=0$$

I la distància d'aquesta recta al punt (-1,1)

$$d = \frac{|-4+3-12|}{\sqrt{16+9}} = \frac{13}{5}$$

19 Busca la distància de l'origen de coordenades a la recta que passa pels punts A(-2,1) i B(3,-2)

L'equació de la recta és $\frac{x+2}{5} = \frac{y-1}{-3} \quad \Rightarrow 3x+5y+1=0$

La distància d'aquesta recta a l'origen

$$d = \frac{1}{\sqrt{9+25}} = \frac{1}{\sqrt{34}}$$

20 Calcula les equacions de les bisectrius dels angles que formen les rectes $3x-4y+1=0$ i $5x+12y-7=0$

Plantegem

$$\frac{|3x-4y+1|}{5} = \frac{|5x+12y-7|}{13}$$

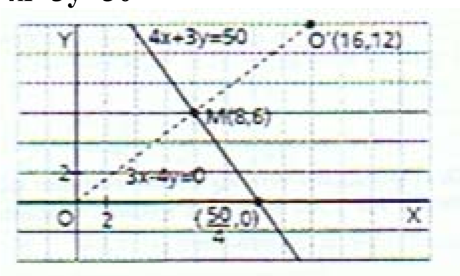
d'on obtenim les dues equacions

$13(3x-4y+1)=5(5x+12y-7)$
i
$13(3x-4y+1)=-5(5x+12y-7)$
De la primera equació obtenim la primera de les bisectrius
$14x-112y+48=0 \Rightarrow 7x-56y+24=0$
i la segona
$64x+8y-22=0 \Rightarrow 32x+4y-11=0$

21 Donada la recta ax+by=1, determina a i b sabent que la recta donada és perpendicular a la recta d'equació 2x+4y=11 i que passa pel punt $p=\left(1,\frac{3}{2}\right)$

La recta té de vector director (b,-a), si ha de ser perpendicular al vector director de la segona (4,-2), el seu producte escalar ha de ser zero
$(b,-a)\cdot(4,-2)=4b+2a=0 \Rightarrow a=-2b$
i si la recta ha de passar pel punt p s'ha de verificar
$a+\frac{3}{2}b=1$
de les dues equacions obtenim, substituint el valor de a de la primera
$-2b+\frac{3}{2}b=1 \quad \Rightarrow -\frac{1}{2}b=1 \Rightarrow b=-2$
Aleshores b=-2 i a=4

32 Busca les coordenades del punt simètric de l'origen respecte de la recta 4x+3y=50



L'equació de la recta perpendicular a 4x+3y=50 i que passa per l'origen és
3x-4y=0. Calculem el punt de tall de les dues rectes resolent el sistema
$$\begin{cases} 4x+3y=50 \\ 3x-4y=0 \end{cases}$$
que té de solució el punt M(8,6)
El punt simètric de l'origen serà
$O'=(8,6)+(8,6)=(16,12)$

35 Els punts B(-1,3) i C(3,-3) són els vèrtex d'un triangle isòsceles que té el tercer vèrtex A sobre la recta x+2y-15=0. AB i AC són els costats iguals. Calcula les coordenades de A i les tres altures del triangle

Si el vèrtex A està a la recta x+2y-15=0 és un punt de la forma (15-2y,y). Demanem que les distàncies d'aquest punt a B i C siguin les mateixes
Formem els vectors

$\overrightarrow{AB} = (-1-15+2y, 3-y) = (-16+2y, 3-y)$

$\overrightarrow{AC} = (3-15+2y, -3-y) = (-12+2y, -3-y)$

Els mòduls d'aquests dos vectors han de ser iguals

$\sqrt{(-16+2y)^2 + (3-y)^2} = \sqrt{(-12+2y)^2 + (-3-y)^2}$

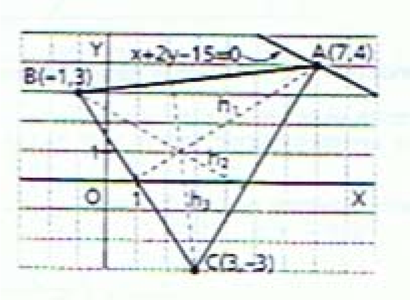
Elevant al quadrat i desenvolupant

$256 - 64y + 4y^2 + 9 - 6y + y^2 = 144 - 48y + 4y^2 + 9 + 6y + y^2$

$112 = 28y$

$y = 4$

El punt és y=4 i x=7 A(7,4)



37 Busca l'equació de la recta que passa pel punt P(2,-3) i forma un angle de 45º amb la recta 3x-4y+7=0

El vector director de la recta és (1,m). Si ha de formar un angle de 45º amb el vector (4,3) de la recta ha de ser

$$\cos 45 = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4+3m}{\sqrt{1+m^2}\sqrt{16+9}}$$

Si resolem

$5\sqrt{2}\sqrt{1+m^2} = 2(4+3m)$

$50(1+m^2) = 4(4+3m)^2$

$50 + 50m^2 = 64 + 96m + 36m^2$

$14m^2 - 96m - 14 = 0$

$7m^2 - 48m - 7 = 0$

Les solucions d'aquesta equació de segon grau són

$$m = \frac{48 \pm \sqrt{2304+196}}{14} = \frac{48 \pm \sqrt{2500}}{14} = \frac{48 \pm 50}{14} = \begin{cases} = 7 \\ = -\dfrac{1}{7} \end{cases}$$

Tenim dues solucions, rectes que passen per (2,-3) i de vectors directors (1,7) i $\left(1, -\frac{1}{7}\right)$

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{7}; \quad \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{-\frac{1}{7}}$$

39 Busca el punt de la recta 2x-y+5=0 que equidisti de A(3,5) i B(2,1)

Un punt genèric de la recta és de la forma (x,2x+5). Les distàncies a A i a B han de ser iguals

$$\sqrt{(x-3)^2+(2x)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(2x+4)^2}$$

Resolent obtenim

$$x^2-6x+9+4x^2=x^2-4x+4+4x^2+16x+16$$

$$-6x+4x-16x=4+16-9$$

$$-18x=11$$

$$x=-\frac{11}{18}$$

El punt de la recta és $\left(-\frac{11}{18},\frac{34}{9}\right)$

41 Busca el valor de k perquè les rectes

$r:\begin{cases}x=2-t\\ y=2t\end{cases}$ $\qquad r':\begin{cases}x=1+2s\\ y=2+ks\end{cases}$

formin un angle de 45º

Els vectors directors de les rectes són (-1,2) i (2,k). Podem plantejar

$$\cos 45=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{-2+2k}{\sqrt{5}\sqrt{4+k^2}}$$

si resolem

$$10(4+k^2)=4(2k-2)^2$$

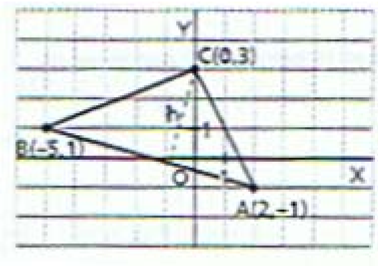
$$40+10k^2=16k^2-32k+16$$

$$0=6k^2-32k-24$$

$$0=3k^2-16k-12$$

Les solucions de l'equació són $k=6;\quad k=-\frac{2}{3}$

45 Busca la longitud de l'altura del triangle A(2,-1), B(-5,1) i C(0,3) que parteix del vèrtex C i calcula l'àrea del triangle



La base és la recta AB, el vector director és (7,-2) i l'equació

$$\frac{x-2}{7}=\frac{y+1}{-2}\Rightarrow -2x+4=7y+7\Rightarrow 2x+7y+3=0$$

La distància del vèrtex C(0,3) a aquesta recta és l'altura del triangle

$$h=\frac{|21+3|}{\sqrt{4+49}}=\frac{24}{\sqrt{54}}=\frac{24}{3\sqrt{6}}=\frac{8}{\sqrt{6}}$$

I la base és la distància de A fins B, el mòdul del vector AB

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{4+49}=\sqrt{54}=3\sqrt{6}$$

Finalment l'àrea demanada

$$A = \frac{bh}{2} = \frac{1}{2} 3\sqrt{6} \frac{8}{\sqrt{6}} = 12\ u^2$$

50 Busca l'àrea del triangle de vèrtexs A(3,4) B(5,6) i C(7,-1)

Podem fer servir diferents procediments. Un és $A = \frac{1}{2} ab \sin C$

Formem els vectors $\overrightarrow{AB} = (2,2)$ i $\overrightarrow{AC} = (4,-5)$, els mòduls són, respectivament, $\sqrt{8}$ i $\sqrt{41}$, les llargades de dos costats del triangle

L'angle que formen els vectors és

$$\cos C = \frac{8-10}{\sqrt{8}\sqrt{41}} = -\frac{2}{\sqrt{328}}$$

ens cal el sinus de l'angle

$$\sin C = \sqrt{1-\cos^2 C} = \sqrt{1-\frac{4}{328}} = \sqrt{\frac{324}{328}}$$

I l'àrea és

$$A = \frac{1}{2}\sqrt{8}\sqrt{41}\sqrt{\frac{324}{328}} = \frac{\sqrt{324}}{2} = \frac{18}{2} = 9\ u^2$$