26. Amb un filferro d'1 m volem construir la vora d'un rectangle d'àrea màxima. Quines dimensions hem de donar al rectangle?

Els costats del rectangle són x i $\frac{1}{2}-x$, l'àrea

$A = x\left(\frac{1}{2}-x\right) = \frac{x}{2}-x^2$

La derivada és

$A' = \frac{1}{2}-2x$

igualant la derivada a zero i resolent obtenim

$\frac{1}{2} = 2x \Rightarrow \frac{1}{4} = x$

El rectangle ha de ser un quadrat. La segona derivada és negativa, correspon a un màxim.

27. Calcula dos nombres reals que sumin 5 i el producte dels quals sigui el més elevat possible

Els dos nombres són x i 5-x. El seu producte

$P = x(5-x) = 5x - x^2$

La derivada $P' = 5-2x$

Igualant la derivada a zero i resolent $x = \frac{5}{2}$ i correspon a un màxim

28. Tenim un segment de longitud a que es divideix en dues parts que han de servir de base a sengles rectangles. En un dels rectangles, l'altura és el doble de la base, mentre que en l'altre l'altura és el triple de la base. Determina el punt de divisió de manera que la suma de les seves àrees sigui mínima.

Les dues parts són x i a-x. La base x té una altura doble i la base a-x una altura triple. La suma de les àrees és

$S = x \cdot 2x + (a-x)\cdot 3(a-x) = 2x^2 + 3(a^2 - 2ax + x^2) = 5x^2 - 6ax + 3a^2$

La derivada és

$S' = 10x - 6a$

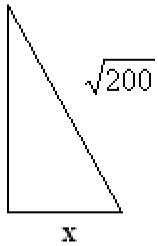
On hem tingut present que a és una costant. Si volem un mínim la derivada ha de ser zero, aleshores

$S' = 10x - 6a = 0 \quad \Rightarrow x = \frac{3}{5}a$

Les parts han de ser de $\frac{3}{5}$ i de $\frac{2}{5}$

29. Es vol fitar una superfície triangular d'àrea màxima aprofitant com a hipotenusa una paret de $\sqrt{200}$ m. Quant han de mesurar els altres dos costats (catets)?

Si un catet és x, l'altre catet serà



$\sqrt{200-x^2}$

L'àrea del triangle

$$A=\frac{x\sqrt{200-x^2}}{2}=\frac{1}{2}\left(200x^2-x^4\right)^{\frac{1}{2}}$$

Si derivem la funció per obtenir un extrem

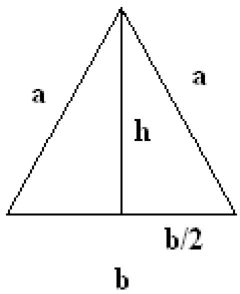
$$A'=\frac{1}{4}\left(200x^2-x^4\right)^{-\frac{1}{2}}\left(400x-4x^3\right)=\frac{400x-4x^3}{4\sqrt{200x^2-x^4}}$$

Igualant a zero i resolent

$$400x-4x^3=0\Rightarrow x(400-4x^2)=0 \quad \Rightarrow x=\begin{cases}0\\10\\-10\end{cases}$$

Per a x=0 l'àrea serà 0 (un mínim). Per a x=10 l'àrea serà màxima

30. Indica quin és el triangle d'àrea màxima de tots els triangles isòsceles que fan 30 m de perímetre.



L'àrea del triangle és $A=\frac{bh}{2}$, si apliquem el teorema de Pitagores podem relacionar b, h i a

$$h^2+\frac{b^2}{4}=a^2$$

I, com que el perímetre ha de ser 30 podem escriure $b+2a=30$

$h^2+\frac{b^2}{4}=a^2$ queda $h^2+\frac{b^2}{4}=\left(\frac{30-b}{2}\right)^2$ i si aïllem h

$$h=\sqrt{\left(\frac{30-b}{2}\right)^2-\frac{b^2}{4}}=\sqrt{\frac{900-60b}{4}}$$

L'àrea serà, aleshores

$$A=\frac{b\sqrt{\frac{900-60b}{4}}}{2}$$

si derivem i igualem a zero

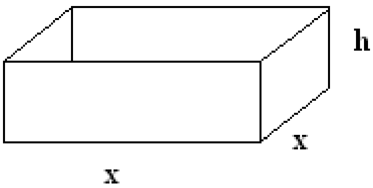
$$A'=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{900-60b}{4}}+\frac{-60b}{2\sqrt{\frac{900-60b}{4}}}\right)=0$$

Resolent l'equació

$$\frac{900-60b}{4}=30b \quad \Rightarrow 900=90b \quad \Rightarrow b=10$$

de b=10 obtenim a=10. És un triangle equilàter

31. Busca les dimensions d'un dipòsit obert per la part de dalt i que té una forma de prisma recte de base quadrada i una capacitat de 500 m^3 , si sabem que el seu revestiment té un cost mínim



Siguin x els costats de la base quadrada i h l'altura. Si el volum és de 500 m^3

$$500=x^2h \quad \Rightarrow h=\frac{500}{x^2}$$

Si l'àrea ha de ser mínima aquesta és

$$A=x^2+4xh=x^2+4x\frac{500}{x^2}=x^2+\frac{2000}{x}$$

i la derivada

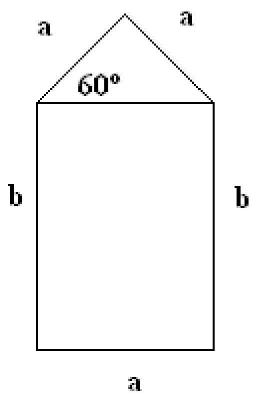
$$A'=2x-\frac{2000}{x^2}$$

Si igualem la derivada a zero i resolem

$$2x^3=2000 \Rightarrow x^3=1000 \Rightarrow x=10$$

La base ha de ser de 10 m, l'altura de 5 m

32. Una finestra rectangular acaba formant un triangle equilàter a la part superior. Si sabem que el perímetre de la finestra és de 6 m, busca'n les dimensions perquè la superfície sigui màxima



El perímetre de la finestra és $6 = 3a + 2b$, la seva superfície és la suma d'un rectangle i un triangle equilàter

$$S = ab + \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

del perímetre aïllem b i substituïm

$$S = a\left(\frac{6-3a}{2}\right) + \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{6a-3a^2}{2} + \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Derivem

$$S' = \frac{6-6a}{2} + \frac{2a\sqrt{3}}{4} = 3 - 3a + \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

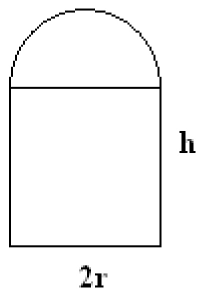
igualant la derivada a zero i resolent

$$3 = a\left(3 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow a = \frac{3}{\left(3 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{6}{6-\sqrt{3}} = 1{,}406$$

i l'altura b

$$b = \frac{6-3a}{2} = 0{,}891$$

33. Una finestra "normanda" consisteix en un rectangle coronat amb un semicercle. Busca les dimensions de la finestra d'àrea màxima quan el perímetre és de 10 m.



El perímetre és $10 = 2r + 2h + \pi r = 2h + r(2+\pi)$

Si aïllem h obtenim $h = \dfrac{10 - r(2+\pi)}{2}$

I l'àrea $A = 2rh + \dfrac{\pi r^2}{2}$

Substituint h aïllada anteriorment

$$A = 2rh + \frac{\pi r^2}{2} = 2r\left(\frac{10 - r(2+\pi)}{2}\right) + \frac{\pi r^2}{2} = 10r - 2r^2 - \pi r^2 + \frac{\pi r^2}{2}$$

que podem simplificar a

$$A = -\frac{\pi r^2}{2} - 2r^2 + 10r$$

de derivada $A' = -\pi r - 4r + 10$

Igualem a zero i resolem $10 = r(4+\pi) \quad \Rightarrow r = \dfrac{10}{4+\pi}$

La segona derivada és $A'' = -\pi - 4 < 0$

Té signe negatiu, correspon a un màxim. Les dimensions han de ser

$$r = \frac{10}{4+\pi} \quad ; \quad h = \frac{10 - r(2+\pi)}{2} = \frac{10 - \left(\frac{10}{4+\pi}\right)(2+\pi)}{2} = \frac{10}{4+\pi}$$

34. En una oficina de correus només admeten paquets amb forma de paral·lelepípede rectangular, de manera que l'amplada i l'altura siguin iguals i, a més, la suma de l'amplada, l'altura i la llargada sigui de 72 cm. Busca les dimensions del paral·lelepípede perquè el volum sigui màxim.

Si x és l'amplada, també x ha de ser l'altura, i la llargada 72-2x

Aleshores el volum és

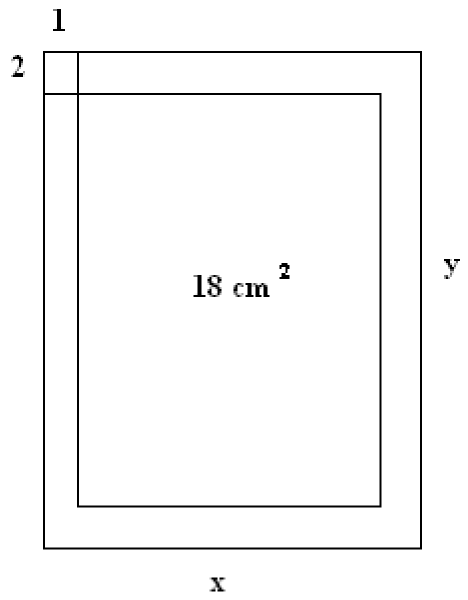
$$V = x \cdot x \cdot (72 - 2x) = 72x^2 - 2x^3$$

La derivada $V' = 144x - 6x^2$

Les solucions de la derivada igualada a zero són $x = 0$ i $x = 24$

La segona derivada és $V'' = 144 - 12x$, de signe negatiu si x=24. Aquesta solució correspon a un màxim. Les dimensions són 24 cm cada aresta. Correspon a un cub

35. Un full de paper ha de contenir 18 cm^2 de text imprès. Els marges superior i inferior han de tenir 2 cm cada un i el laterals 1 cm. Calcula les dimensions del full de paper perquè la despesa de paper sigui mínima.



Si x i y són les dimensions del full de paper, quan descomptem els marges queda una superfície útil de $(x-2)(y-4)=18$

I la superfície total del paper, que ha de ser mínima, és $S = xy$

Aïllem y a la primera relació i substituïm a la segona

$y=\dfrac{18}{x-2}+4=\dfrac{18+4x-8}{x-2}=\dfrac{10+4x}{x-2}$; $S = xy = x\left(\dfrac{10+4x}{x-2}\right)=\dfrac{10x+4x^2}{x-2}$

Derivant i igualant a zero

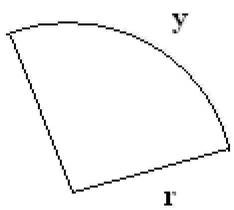
$$S'=\frac{(10+8x)(x-2)-(10x+4x^2)}{(x-2)^2}=\frac{4x^2-16x-20}{(x+2)^2}=0$$

Les solucions són

$$x=\frac{16\pm\sqrt{256+320}}{8}=\frac{16\pm\sqrt{576}}{8}=\frac{16\pm 24}{8}=\begin{cases}5\\-1\end{cases}$$

La solució negativa no té sentit, la solució x=5 és un mínim. Les dimensions del full de paper són 5 i 10 cm.

36. Una jardinera ha de construir un parterre amb forma de sector circular. Si disposa de 20 m de filferro per envoltar-lo, quin radi ha de tenir el sector perquè el parterre tingui la màxima superfície possible?



Si r és el radi del sector circular i y l'arc, el seu perímetre és $2r + y = 20$

L'àrea del sector circular és $A=\dfrac{ry}{2}=\dfrac{r(20-2r)}{2}=10r-r^2$

Volem un extrem, derivem i igualem a zero

$A' = 10 - 2r = 0 \quad \Rightarrow r = 5$

La segona derivada és $A'' = -2 < 0$, correspon a un màxim. Les dimensions han de ser 5 de radi i 10 d'arc

37. Es vol fabricar una llauna de conserves en forma de cilindre circular recte amb una àrea total de 150 cm^2 i un volum màxim. Determina'n la generatriu i el radi.

El volum del cilindre és $V = \pi r^2 h$, la seva àrea total

$150 = 2\pi r^2 + 2\pi r h$

Aïllem h i substituïm al volum $h = \dfrac{150 - 2\pi r^2}{2\pi r}$

$$V = \pi r^2 \left(\frac{150 - 2\pi r^2}{2\pi r} \right) = \frac{r}{2}\left(150 - 2\pi r^2\right) = 75r - \pi r^3$$

La derivada és

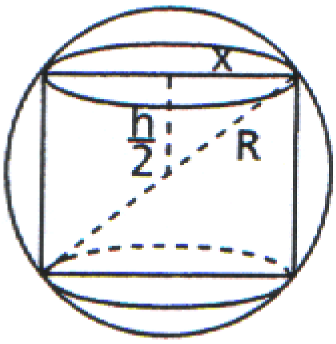
$V' = 75 - 3\pi r^2$

Igualada a zero dóna com solucions $r^2 = \dfrac{25}{\pi}; \quad r = \dfrac{5}{\sqrt{\pi}}$

La segona derivada és negativa, correspon a un màxim. Les dimensions són

$r = \dfrac{5}{\sqrt{\pi}}; \quad h = \dfrac{10}{\sqrt{\pi}}$

38. Busca el radi de la base i l'altura d'un cilindre inscrit en una esfera de radi R si sabem que el volum del cilindre és màxim.



Sigui R el radi de l'esfera, x el radi del cilindre i h la seva altura. Podem aplicar el teorema de Pitagores i obtenim una relació entre aquests valors

$$R^2 = x^2 + \frac{h^2}{4}$$

d'on aïllem l'altura

$h^2 = 4(R^2 - x^2) \Rightarrow h = 2\sqrt{R^2 - x^2}$

El volum del cilindre serà

$V = \pi x^2 h = \pi x^2\, 2\sqrt{R^2 - x^2}$

Si derivem obtenim

$$V'=2\left[2\pi x\sqrt{R^2-x^2}-\pi x^2\frac{2x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right]$$

Igualant la derivada a zero i resolent

$$2\pi x\left(R^2-x^2\right)=2\pi x^3$$

$$R^2-x^2=x^2$$

$$R^2=2x^2$$

d'on

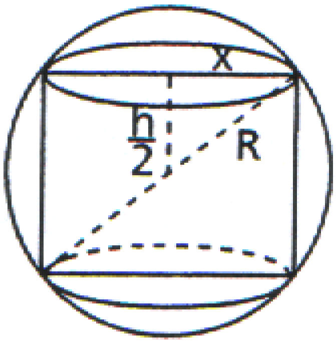
$$x=\frac{R}{\sqrt{2}}=\frac{R\sqrt{2}}{2}$$

i l'altura del cilindre

$$h=2\sqrt{R^2-x^2}=2\sqrt{R^2-\frac{R^2}{2}}=2\sqrt{\frac{R^2}{2}}=\frac{2R}{\sqrt{2}}=2x$$

ha de ser doble del radi

39. Busca el radi de la base i l'altura d'un cilindre inscrit en una esfera de radi R si sabem que l'àrea lateral del cilindre és màxima.



Les relacions entre el radi i l'altura són les mateixes que en l'exercici anterior

$$h^2=4(R^2-x^2)\Rightarrow h=2\sqrt{R^2-x^2}$$

I ara la funció que volem que sigui màxima és l'àrea lateral del cilindre

$$S=2\pi xh=4\pi x\sqrt{R^2-x^2}$$

que té de derivada

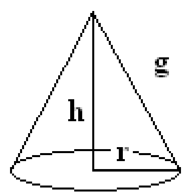
$$S'=4\pi\sqrt{R^2-x^2}+4\pi x\frac{-2x}{2\sqrt{R^2-x^2}}=4\pi\left(\sqrt{R^2-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)$$

Si igualem a zero i resolem obtenim

$$R^2-x^2=x^2\quad\Rightarrow R^2=2x^2\Rightarrow x=\frac{R}{\sqrt{2}}$$

Les mateixes solucions que en l'exercici anterior

40. Un triangle isòsceles de 10 m de perímetre gira al voltant de l'altura relativa al costat no igual i engendra un con. Busca'n els costats perquè aquest con tingui el volum màxim.



Si r, g i h són, respectivament, el radi, la generatriu i l'altura del con, es verifica que

$2r+2g=10$

ja que el perímetre del triangle isòsceles és de 10 m

$r^2+h^2=g^2$

si apliquem el teorema de Pitagores

El volum del con resultant serà

$$V=\frac{\pi r^2 h}{3}$$

aïllem h de la segona equació i substituïm

$$V=\frac{\pi r^2 h}{3}=\frac{\pi r^2\sqrt{g^2-r^2}}{3}$$

La funció depèn ara del radi i la generatriu. Aïllem i substituïm la generatriu de la primera equació, la que donava el perímetre

$$V=\frac{\pi r^2 h}{3}=\frac{\pi r^2\sqrt{g^2-r^2}}{3}=\frac{\pi r^2\sqrt{(5-r)^2-r^2}}{3}=\frac{\pi r^2\sqrt{25-10r}}{3}$$

Derivem la funció

$$V'=\frac{\pi}{3}\left(2r\sqrt{25-10r}-\frac{10r^2}{2\sqrt{25-10r}}\right)$$

Si igualem a zero iresolem

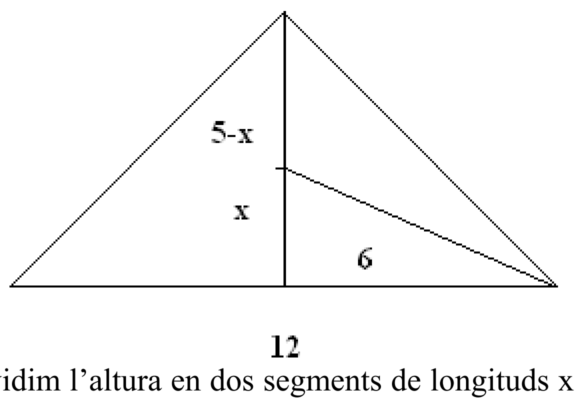
$4r(25-10r)=10r^2$

Una solució és r=0 i l'altra

$4(25-10r)=10r \quad \Rightarrow 100=50r \Rightarrow r=2$

El radi és de 2 m. Aleshores el triangle té de costats 4, 3 i 3 m

41. El costat desigual d'un triangle isòsceles fa 12 cm mentre que l'altura relativa a aquest costat fa 5 cm. Busca un punt sobre aquesta altura de manera que la suma de les distàncies als tres vèrtexs sigui mínima.



Dividim l'altura en dos segments de longituds x i 5-x. La suma de les distàncies als tres vèrtexs serà

$D = 2\sqrt{36+x^2} + 5 - x$

La derivada

$D' = \dfrac{2x}{\sqrt{36+x^2}} - 1$

Si igualem a zero obtenim $2x = \sqrt{36+x^2}$, elevant al quadrat $4x^2 = 36 + x^2$ que té de solució positiva $x = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

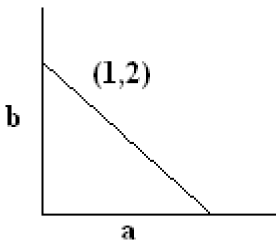
42. Busca la base x i l'altura y d'una cartolina rectangular de 60 cm de perímetre que, en donar la volta completa al voltant d'un costat vertical genera un cilindre de volum màxim

Un costat és el radi del cilindre i l'altre l'altura. Si el perímetre és de 60 cm la relació que hi ha entre el radi i l'altura és $r + h = 30$. EL volum del cilindre serà

$V = \pi r^2 h = \pi r^2 (30 - r) = \pi \left(30r^2 - r^3\right)$

La derivada és $V' = \pi\left(60r - 3r^2\right)$. Si la derivada ha de ser zero les solucions són r=0 i r=20

44. Busca, entre totes les rectes que passen pel punt A(1,2), la que forma un triangle d'àrea mínima amb les parts positives dels eixos de coordenades. Calcula també l'àrea d'aquest triangle.



Siguin a i b els dos segments que determina la recta sobre els eixos positius. L'àrea del triangle format és $A = \dfrac{ab}{2}$

La recta té (0,b) d'ordenada a l'origen i el pendent és $m = -\dfrac{b}{a}$, l'equació ha de ser

$y = -\dfrac{b}{a}x + b$, si ha de passar per (1,2) trobem una relació

$2 = -\dfrac{b}{a} + b \quad \Rightarrow 2a = -b + ab \quad \Rightarrow 2a - ab = -b \Rightarrow a(2-b) = -b \Rightarrow a = \dfrac{b}{b-2}$

L'àrea del triangle és, aleshores

$A = \dfrac{ab}{2} = \dfrac{\left(\dfrac{b}{b-2}\right)b}{2} = \dfrac{b^2}{2b-4}$

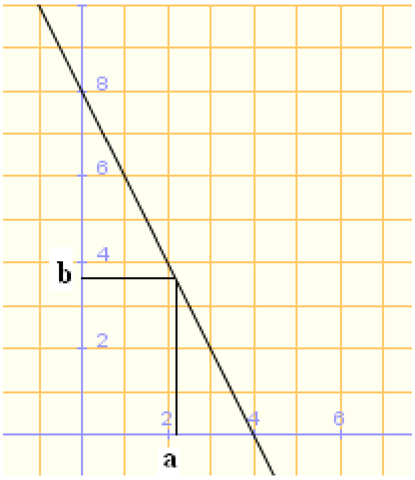
que té de derivada

$A' = \dfrac{2b(2b-4) - 2b^2}{(2b-4)^2} = \dfrac{2b^2 - 8b}{(2b-4)^2}$

Si la derivada val zero, les solucions són b=0 i b=4, d'on a=2. L'equació de la recta és

$y = -\frac{b}{a}x + b \quad ; \quad y = -2x + 4$

45. Dins dels triangle limitat pels eixos OX, OY i la recta 2x+y=8 s'inscriu un rectangle de vèrtexs (0,0), (a,0), (a,b) i (0,b). Determina a quin punt (a,b) correspon un rectangle d'àrea màxima. Busca els punts (a,b) als quals correspon un rectangle d'àrea mínima.



L'àrea del rectangle és A=ab i la relació que lliga a i b és formar part de la recta 2x+y=8, és a dir 2a+b=8. Si aïllem b i substituïm podem obtenir

$A = ab = a(8-2a) = 8a - 2a^2$

La derivada és $A' = 8 - 4a$, de solució a=2. Com que la segona derivada és $A'' = -4 < 0$, la solució correspon a un rectangle d'àrea màxima

Podem considerar una solució d'àrea mínima quan el rectangle esdevé un segment, el cas a=0 o a=4

46. Determina la distància mínima que hi ha des de l'origen a la corba xy=1

La distància de l'origen a un punt de coordenades (x,y) és

$d = \sqrt{x^2 + y^2}$

Si els punts han d'estar sobre la corba $xy = 1 \quad \Rightarrow y = \frac{1}{x}$, la distància pot escriure's

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} = \sqrt{\frac{x^4 + 1}{x^2}}$$

La derivada és

$$d' = \frac{\frac{4x^5 - 2x(x^4+1)}{x^4}}{2\sqrt{\frac{x^4+1}{x^2}}}$$

Si la derivada ha de ser zero hem de resoldre

$$4x^5 - 2x^5 - 2 = 0 \quad \Rightarrow 2x^5 = 2 \quad \Rightarrow x = \sqrt[5]{1} = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$$

Les dues solucions, que corresponen els punts de la corba (1,1) i (-1,-1) són mínims

La distància és

$d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2}$

47. Una pedra preciosa pesa 12 gr. Si sabem que el valor d'una pedra preciosa és proporcional al quadrat del seu pes i que aquesta pedra val 1440 €, calcula, quan partim aquesta pedra en dos trossos, quin és el valor de cada tros quan la depreciació és mínima.

Primer calculem el valor de la constat de proporcionalitat
$V = kp^2 \quad \Rightarrow 1440 = k \cdot 12^2 \quad \Rightarrow k = 10$
Si la pedra es parteix en dues parts, de pes x i 12-x, el valor serà
$V = kx^2 + k(12 - x)^2 = kx^2 + 144k - 24kx + kx^2 = k(2x^2 - 24x + 144)$
de derivada
$V' = k(4x - 24)$
el valor zero de la derivada correspon a x=6. La segona derivada és negativa i el valor és màxim. Aquest és independent del valor de la constant k, que només ens fa falta si volem determinar aquest valor màxim
$V(x = 6) = 10 \cdot 6^2 + 10 \cdot 6^2 = 720$ €