1. Calcula dos nombres que sumin 7 de manera que sigui màxim el seu producte

Siguin els nombre x i 7-x. La funció que dóna el producte és
$f(x) = x(7-x) = 7x - x^2$
Demanem un màxim, la derivada ha de ser zero
$f' = 7 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{2} = 3{,}5$
Si estudiem el creixement i decreixement de la funció veiem que és, en efecte, un màxim. Si calculem la segona derivada el valor és
$f'' = -2 < 0$
negatiu, és, en efecte, un màxim

2. De tots els rectangles de 40 cm de perímetre, calcula el de diagonal més curta

Si el rectangle ha de tenir 40 cm de perímetre, podem plantejar
$40 = 2b + 2h \quad \Rightarrow 20 = b + h$
aïllem una variable en funció de l'altre, per exemple $h = 20 - b$
La hipotenusa serà, aplicant el teorema de Pitagores
$y = \sqrt{b^2 + (20-b)^2} = \sqrt{b^2 + 400 - 40b + b^2} = \sqrt{2b^2 - 40b + 400}$
Volem que la hipotenusa sigui mínima. Derivem i igualem a zero
$$y' = \frac{4b - 40}{2\sqrt{2b^2 - 40b + 400}} = \frac{2b - 20}{\sqrt{2b^2 - 40b + 400}}$$
La solució de $2b - 20 = 0$ és $b = 10$
Valors més petits de 10 donen una derivada negativa (funció decreixent) i valors superiors a 10 una derivada positiva (funció creixent). El valor 10 és un mínim

Una segona manera
El màxim de la funció $y = \sqrt{b^2 + (20-b)^2}$ estarà en el mateix punt que el màxim de la funció radicant, és a dir, el màxim de $z = b^2 + (20-b)^2 = 2b^2 - 40b + 400$. És més fàcil derivar aquesta funció. El resultat és el mateix

3. Calcula dos nombres que sumin 8 de manera que sigui màxim el producte d'un d'ells pel quadrat de l'altre

La funció que volem optimitzar és $z = x^2 y$, el producte d'un nombre pel quadrat de l'altre, la relació que hi ha entre els dos nombres és que sumen 8 $x + y = 8$, aïllem un d'ells i substituïm
$z = x^2(8-x) = 8x^2 - x^3$
La derivada d'aquesta funció és $z' = 16x - 3x^2$. Si igualem a zero i resolem obtenim
$$16x - 3x^2 = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 16 - 3x = 0 \Rightarrow x = \frac{16}{3} \end{cases}$$

La segona derivada és $z''=16-6x$, que quan $x=\frac{16}{3}$ dóna un valor negatiu. És un màxim. Els valors dels dos nombre són $x=\frac{16}{3}$ i $y=8-\frac{16}{3}=\frac{8}{3}$. El màxim producte serà

$$z=\left(\frac{16}{3}\right)^2\cdot\frac{8}{3}$$

4. **El propietari d'un camp de 30 pomeres espera obtenir 200 kg de pomes per pomera i any. Per cada pomera més que planti la producció es redueix 5 kg per pomera i any. Calcula les pomeres que ha de tenir en el camp per obtenir el màxim benefici**

La quantitat de kg de pomes serà el producte de la quantitat de pomeres i els kg de cada pomera. Si planta x pomeres més hi haurà en el camp 30+x pomeres, cada una d'elles produeix 200-5x kg de pomes. La producció total, que volem que sigui màxima, és

$$p=(30+x)(200-5x)=6000+50x-5x^2$$

Derivem i igualem a zero

$$p'=50-10x=0 \quad \Rightarrow x=5$$

La segona derivada és negativa. Correspon a un màxim. Ha de plantar 5 pomeres més. Cada una de les 35 pomeres donarà 175 kg de fruita

5. **Una fàbrica de cervesa vol construir llaunes cilíndriques de 300 cc de capacitat. El material del lateral costa 0,4 €/cm^2 i el de les tapes 0,5 €/cm^2. A més a més el tirador de la llauna té un cost de 0,1 €. Calcula les dimensions de la llauna més econòmica possible.**

El volum de 300 cc ha de ser $V=300=\pi r^2 h \Rightarrow h=\frac{300}{\pi r^2}$

I el cost de construcció de la llauna

$$C=0{,}5\cdot 2\pi r+0{,}4\cdot\pi rh+0{,}1=0{,}5\cdot 2\pi r+0{,}4\cdot\pi r\frac{300}{\pi r^2}+0{,}1$$

Simplificant i derivant obtenim

$$C=\pi r^2+\frac{240}{r}+0{,}1\Rightarrow C'=2\pi r-\frac{240}{r^2}$$

Igualem a zero la derivada i resolem

$$r^3=\frac{240}{2\pi}\Rightarrow r=\sqrt[3]{\frac{240}{2\pi}}=3{,}37$$

El radi ha de ser de 3,37 cm i l'altura de 8,38 cm

6. **Es vol construir un dipòsit cilíndric de volum V. Calcula la relació que hi ha entre el radi i l'altura que fa mínima la superfície**

El volum d'un cilindre és $V=\pi r^2 h\Rightarrow h=\frac{V}{\pi r^2}$

La superfície és

$$S=2\pi r^2+2\pi rh=2\pi r^2+2\pi r\frac{V}{\pi r^2}=2\pi r^2+\frac{2V}{r}$$

Aquesta superfície ha de ser mínima. Derivem la funció tenint present que V és el volum constant

$$S' = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = 0 \Rightarrow 4\pi r^3 = 2V \Rightarrow r^3 = \frac{2V}{4\pi} = \frac{2\pi r^2 h}{4\pi}$$

i, finalment $r = \dfrac{h}{2}$, el radi ha de ser la meitat de l'altura

7. **Un rellotge té les dues busques d'1 cm. Calcula l'angle que han de formar per fer que sigui màxima la superfície del triangle format per les dues busques i el segment que uneix els seus extrems.**

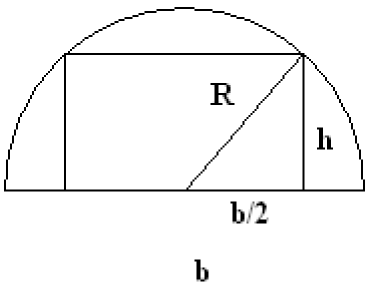
L'àrea d'un triangle és $A = \dfrac{1}{2} ab \sin C = \dfrac{1}{2} 1 \cdot 1 \sin C = \dfrac{1}{2} \sin C$

Si derivem per a cercar la màxima àrea d'un triangle de costats 1 i 1 obtenim

$$A' = \frac{1}{2}\cos C = 0 \Rightarrow \cos C = 0 \Rightarrow C = 90^{\circ}$$

El triangle ha de ser rectangle

8. **Calcula les dimensions del rectangle d'àrea màxima inserit en una semicircumferència de radi R**



La funció que volem que sigui màxima és l'àrea del rectangle $A = bh$

i la relació que hi ha entre la base i l'altura del rectangle ve determinada pel teorema de Pitagores

$R^2 = \left(\dfrac{b}{2}\right)^2 + h^2$, aïllem h $h = \sqrt{R^2 - \dfrac{b^2}{4}}$

Substituïm aquest valor a la funció

$$A = b \cdot \sqrt{R^2 - \frac{b^2}{4}}$$

La derivada és

$$A' = \sqrt{R^2 - \frac{b^2}{4}} - \frac{-\dfrac{2b^2}{4}}{2\sqrt{R^2 - \dfrac{b^2}{4}}}$$, igualant a zero i resolent

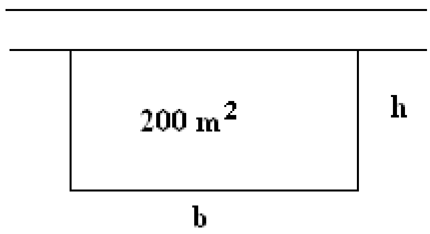
$$2\left(R^2 - \frac{b^2}{4}\right) = \frac{2b^2}{4} \Rightarrow R^2 - \frac{b^2}{4} = \frac{b^2}{4} \Rightarrow b = R\sqrt{2}$$

i l'altura

$$h=\sqrt{R^2-\frac{b^2}{4}}=\sqrt{R^2-\frac{2R^2}{4}}=\sqrt{\frac{R^2}{2}}=\frac{R}{\sqrt{2}}=\frac{R\sqrt{2}}{2}=\frac{b}{2}$$

La base ha de ser doble de l'altura

9. **(Un de cowboys) Un boy vol tancar les cows aprofitant un riu rectilini i fent servir la mínima llargada de filat possible. El recinte ha de ser rectangular de superfície 200 m^2. Calculeu la llargada i l'amplada tenint present que les vaques no volen mullar-se, és a dir, que no li cal filat al riu**



La base i l'altura han de verificar $b\cdot h=200 \quad \Rightarrow h=\frac{200}{b}$

La quantitat de filat és $L=b+2h=b+\frac{400}{b}$. Hem de tenir present que un costat (una de les bases) no cal tancar-la. La derivada és

$$L'=1-\frac{400}{b^2}$$

Si igualem a zero i resolem obtenim

$$1=\frac{400}{b^2}\Rightarrow b=\sqrt{400}=20$$

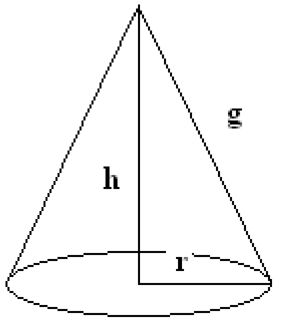
La base ha de ser de 20 m i l'altura de 10. El filat que gastarem serà 40 m

La segona derivada és

$$L''=\frac{800}{b^3}$$

per valors positius de la base té valors positius, correspon a un mínim

10. **(Un d'indis) Diu que hi ha una tribu d'indis preocupada per la qüestió de l'habitatge. Les tendes còniques han de tenir un volum de 10 m^3 per acollir-se al pla TIPO (Tendes Índies de Protecció Oficial). Pressions del Departament de finances fan que s'hagi de minimitzar el cost (la quantitat de pell de búfal). Pressions del Departament de Medi Ambient fan que no hagin de tenir sòl (així estalviem més búfals). Determina les dimensions que han de tenir les tendes**.



El volum del con ha de ser de 10 m^3. $V = 10 = \dfrac{\pi r^2 h}{3} \Rightarrow h = \dfrac{30}{\pi r^2}$

La superfície ha de ser mínima

$$S = \pi\, r\, g = \pi\, r\sqrt{r^2 + \left(\frac{30}{\pi r^2}\right)^2} = \pi\, r\sqrt{\frac{\pi^2 r^6 + 900}{\pi^2 r^4}} = \frac{\pi\, r}{\pi\, r}\sqrt{\pi^2 r^4 + \frac{900}{r^2}}$$

Hem aplicat el teorema de Pitagores al triangle rectangle que formen generatriu, radi i altura. Derivant obtenim

$$S' = \frac{4\pi^2 r^3 - \dfrac{1800}{r^3}}{2\sqrt{\pi^2 r^4 + \dfrac{900}{r^2}}}$$

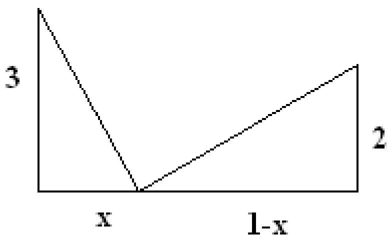
igualant a zero i resolent

$$4\pi^2 r^6 = 1800 \Rightarrow r = \sqrt[6]{\frac{450}{\pi^2}} = 1{,}89$$

El radi ha de ser 1,89 m i l'altura 2,67 m

11. **(Un de la vida de parella) Un blauet (*Alcedo Atthis*) mascle està sobre un arbre a 3 m d'altura a la vora d'un rierol d'1 m d'amplada. Vol anar a veure l'estimada, un blauet (*Alcedo Atthis*) femella sobre un altre arbre a 2 m d'altura a l'altra banda del rierol. Ocell previsor com pocs decideix anar-hi passant pel rierol a beure aigua i així calmar les seves escalfors abans de la trobada. Calculeu el punt on ha de beure per fer el trajecte el més curt possible.**

Considerem l'esbós següent



El camí que ha de fer l'ocell són les dues hipotenuses del dibuix. La suma de les seves llargades ha de ser mínima

$$L = \sqrt{9 + x^2} + \sqrt{4 + (1 - x)^2}$$

Si derivem

$$L' = \frac{2x}{2\sqrt{9 + x^2}} + \frac{2x + 2}{2\sqrt{5 - 2x + x^2}}$$

igualant a zero i simplificant

$$\frac{x}{\sqrt{9 + x^2}} = \frac{-x + 1}{\sqrt{5 - 2x + x^2}}$$

elevant al quadrat

$$\frac{x^2}{9 + x^2} = \frac{(-x + 1)^2}{5 - 2x + x^2}$$

operant

$x^2(5-2x+x^2)=(-x+1)^2(9+x^2)$

$5x^2-2x^3+x^4=x^4-2x^3+9x^2+9+x^2-18x$

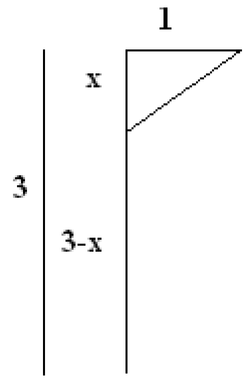
$5x^2-18x+9=0$

Les solucions d'aquesta equació són

$$x=\frac{18\pm\sqrt{144}}{10}=\begin{cases}3\\ \frac{3}{5}\end{cases}$$

La solució x=3 no té sentits ja que x ha de ser menor de 1. El punt és $\frac{3}{5}$

12. **En un moment d'eufòria de la darrera campanya electoral un candidat va prometre fer una carretera de les illes Medes a la platja de Pals. Si la construcció d'un pont és tres vegades més cara que la construcció d'una carretera en terra, calculeu el punt de la costa on ha d'anar a parar l'extrem del pont que faci mínim el cost d'aquesta genial idea. La distància en perpendicular de les illes Medes a la costa és 1 km i d'aquest punt a la platja de Pals 3 km.**



Segons l'esquema el pont ha de tenir una llargada de $\sqrt{x^2+1}$ i la carretera en terra ferma una llargada de 3-x. El cost de construcció serà

$C=3\sqrt{x^2+1}+(3-x)$

on tenim present que fer el pont és tres vegades més car que la carretera. Derivem per obtenir el mínim

$$C'=\frac{3\cdot 2x}{2\sqrt{x^2+1}}-1$$

Igualant a zero i resolent

$$3x=\sqrt{x^2+1}\Rightarrow 9x^2=x^2+1\Rightarrow x=\sqrt{\frac{1}{8}}$$

13. **Un venedor de tot a 100 pensa que d'aquesta sofisticada manera pot vendre 15 articles. Els estudis de mercat que ha fet el seu cunyat que va estudiar economia afirmen que per cada 5 unitats que rebaixi el preu (Tot a 95...) pot obtenir un nou client. Calculeu el preu que ha de tenir cada article per obtenir un calaix màxim**.

El "calaix" que fa el venedor depèn dels compradors que té i del preu. Si rebaixa el preu x vegades 5 unitats vendrà cada article a 100-5x i tindrà 15+x compradors. La funció que dóna els diners que recull és

$B = (100 - 5x)(15 + x) = 1500 + 25x - 5x^2$

Els extrems de la funció són

$B' = 25 - 10x = 0 \Rightarrow x = 2{,}5$

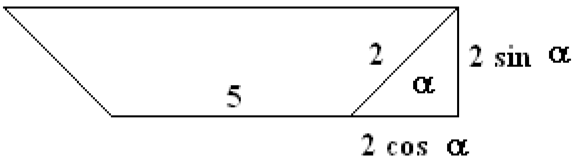
que correspon a un màxim ja que la segona derivada és negativa.

La solució que haurem de donar és rebaixar 2 o 3 vegades el preu. Si ho rebaixa dues vegades el preu és 90 i té 17 compradors, els guanys són 90.17=1530. Si ho rebaixa tres vegades el preu és 85 i té 18 compradors, els guanys 85.18=1530.

Si fos possible rebaixar 2,5 vegades 5 unitats, i, encara més difícil, tenir 17,5 compradors, els guanys serien superiors 87,5.17,5=1531,25. En aquest problema estem limitats a solucions enteres.

14. Finalment la Blancaneus i els set nans han decidit muntar un parc aquàtic. Volen fer una canal per on circuli la màxima quantitat d'aigua doblegant 2 m cada costat d'una làmina de 9 m d'amplada. Calculeu l'angle del doblec que és capaç de transportar més aigua

El trapezi està format per un rectangle i dos triangles rectangles iguals. La seva superfície és



$S = 5 \cdot 2\sin\alpha + 4\sin\alpha\cos\alpha$

La derivada

$S' = 10\cos\alpha - 4\sin^2\alpha + 4\cos^2\alpha$

Per resoldre aquesta equació transformem $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$

$10\cos\alpha - 4(1 - \cos^2\alpha) + 4\cos^2\alpha$

El canvi $\cos\alpha = t$ transforma l'equació en

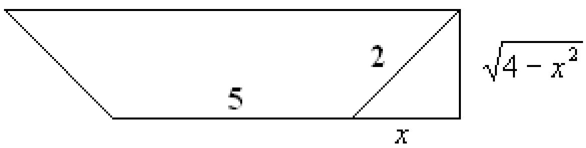
$S' = 10t - 4(1 - t^2) + 4t^2 = 8t^2 + 10t - 4 = 0$

Les solucions són

$$t = \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 128}}{8} = \begin{cases} 0{,}3187 \\ -1{,}568 \end{cases}$$

La segona solució no té sentit. El cosinus d'un angle està fitat per ± 1. De la primera obtenim $\cos\alpha = 0{,}3187 \Rightarrow \alpha = 71{,}41^{\text{o}}$

Si resolem el mateix exercici sense fer servir trigonometria, l'altura i la base de cada triangle han de ser con indica l'esquema. La superfície del trapezi serà



$S = 5\sqrt{4 - x^2} + x\sqrt{4 - x^2}$

La derivada

$$S' = \frac{-10x}{2\sqrt{4 - x^2}} + \sqrt{4 - x^2} - \frac{2x^2}{2\sqrt{4 - x^2}}$$

que podem transformar en

$$S' = \frac{-4x^2 - 10x + 8}{\sqrt{4 - x^2}} = 0$$

Les solucions de l'equació de segon grau són

$$x = \begin{pmatrix} 0{,}63746 \\ -3{,}1374 \end{pmatrix}$$

La segona solució és impossible ja que $0 < x < 5$. De la primera solució podem obtenir l'angle

$$\cos\alpha = \frac{0{,}63746}{2} = 0{,}31873$$

i l'angle 71,40º