Matrius

4. Donades les matrius $A=\begin{pmatrix}2&0&1\\3&0&0\\5&1&1\end{pmatrix}$ **i** $B=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&2&1\\1&1&0\end{pmatrix}$**, calcula AB, BA, AA i BB**

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}2&0&1\\3&0&0\\5&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&1\\1&2&1\\1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1&2\\3&0&3\\7&3&6\end{pmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&2&1\\1&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&0&1\\3&0&0\\5&1&1\end{pmatrix}\cdot=\begin{pmatrix}7&1&2\\13&1&2\\5&0&1\end{pmatrix}$$

observem com $A\cdot B\neq B\cdot A$, el producte de les matrius no és commutatiu

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}2&0&1\\3&0&0\\5&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&0&1\\3&0&0\\5&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&1&3\\6&0&3\\18&1&6\end{pmatrix}$$

$$B^2=B\cdot B=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&2&1\\1&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&1\\1&2&1\\1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&1\\4&5&3\\2&2&2\end{pmatrix}$$

6. Calcula AB i BA, si és possible, tenint en compte que $A=\begin{pmatrix}2&-1\\1&0\\-3&4\end{pmatrix}$ **i** $B=\begin{pmatrix}1&-2&-5\\3&4&0\end{pmatrix}$

Els dos productes són possibles

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}2&-1\\1&0\\-3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-2&-5\\3&4&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-8&-10\\1&-2&-5\\9&22&15\end{pmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}1&-2&-5\\3&4&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&-1\\1&0\\-3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15&-21\\10&-3\end{pmatrix}$$

8. Demostra que la matriu $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ **compleix la relació de recurrència** $A^n=2^{n-1}A$

Calculem les primeres potències de A

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}=2^{2-1}A$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = 2^{3-1} A$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix} = 2^{4-1} A$$

i successivament

9. Calcula les potències n-èssimes de la matriu $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

Calculem les primeres potències i intentem deduir una llei general

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2 \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2 \\ 0 & a^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^4 & 4a^3 \\ 0 & a^4 \end{pmatrix}$$

i, en general

$$A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$$

11. Busca la matriu inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Calculant la matriu inversa fent servir un sistema d'equacions, podem escriure

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Efectuant el producte obtenim el sistema d'equacions

$$\begin{cases} 2x + 3z = 1 \\ 2y + 3t = 0 \\ x + z = 0 \\ y + t = 1 \end{cases}$$

Si resolem en forma de dos sistemes de dues equacions obtenim

$x = -1; y = 3; z = 1; t = -2$

d'on la matriu inversa és

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

12. Busca la matriu inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

La matriu que estem buscant és una matriu de tres files i tres columnes. Plantegen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les equacions que obtenim són

$a = 1$ | $b = 0$ | $c = 0$

$2d = 0 \Rightarrow d = 0$ | $2e = 1 \Rightarrow e = \frac{1}{2}$ | $2f = 0 \Rightarrow f = 0$

$3g = 0 \Rightarrow g = 0$ | $3h = 0 \Rightarrow h = 0$ | $3i = 1 \Rightarrow i = \frac{1}{3}$

Aleshores la matriu inversa és

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

13. Busca, pel mètode de reducció o de Gauss, la matriu inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i comprova el resultat multiplicant les matrius

Observem que ja té zeros per sota de la diagonal principal

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

canviant de signe la primera fila i dividint per 2 la segona obtenim la matriu inversa

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si ara fem el producte de les dues matrius obtenim la identitat

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

14. Busca la matriu inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Fent servir el mètode de Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Canviant el signe de la tercera fila obtenim com matriu inversa

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

16. Calcula una matriu X que verifiqui la igualtat $A \cdot X = B$ amb

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$

La matriu X també verifica la igualtat $X \cdot A = B$?

La relació $A \cdot X = B$ es multiplica per l'esquerra per la matriu A^{-1}, inversa de la matriu A, i obtenim

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

Calculem, aleshores, la matriu inversa de A

$$\begin{pmatrix}2 & 3 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}2 & 3 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}2 & 0 & 4 & -6\\ 0 & 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

d'on la matriu inversa de A és

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

Aleshores la matriu X la calculem

$$X = A^{-1} \cdot B=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 5\\ 3 & -3\end{pmatrix}$$

Si ara multipliquem les matrius X per A obtenim

$$\begin{pmatrix}-4 & 5\\ 3 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & -2\\ 3 & 3\end{pmatrix}\neq B$$

una matriu diferent de la matriu B. No verifica la segona igualtat.

18. Busca una matriu X de manera que $AX + B = C$ si sabem que

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

Resolem l'equació amb matrius

$$A \cdot X + B = C \Rightarrow A \cdot X = C - B \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1}(C-B) \Rightarrow X = A^{-1}(C-B)$$

Ens cal calcula la matriu inversa de A

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & -1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$$

Si ja sabem la matriu inversa de A podem aplicar el resultat anterior i calcular

$$X = A^{-1}(C-B)=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}\right]=$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

19. Busca els valors de x, y i z que verifiquin aquesta equació matricial

$$\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -1\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

Efectuem les operacions de la part esquerra de la igualtat

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ -x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y+z \\ 2y+z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ 2x+2y+z \\ -x+z \end{pmatrix}$$

Si aquesta última matriu ha de ser igual a la matriu $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ podem escriure el sistema d'equacions

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+2y+z=0 \\ -x+z=0 \end{cases}$$

Podem resoldre aquest sistema ràpidament a partir de la última equació, que implica $x=z$, substituint a la primera i a la segona

$$\begin{cases} x+y+x=1 \\ 2x+2y+x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y=1 \\ 3x+2y=0 \end{cases}$$

Si resolem per substitució obtenim

$y=1-2x$

$3x+2(1-2x)=0 \Rightarrow 3x+2-4x=0 \quad \Rightarrow x=2$

i els altres resultats són $y=-3$ i $z=2$

20. Busca una matriu X que verifiqui l'equació $X-B^2=AB$ si sabem que

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Si de l'equació $X-B^2=AB$ aïllem la matri X obtenim $X=AB+B^2=(A+B)B$, aleshores calculem

$$(A+B)B=\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 13 & 10 & 25 \\ 0 & 0 & 48 \end{pmatrix}$$

23. Tenim la matriu $A=\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$. Calcula A^2 i A^3 i busca una llei general per a A^n

$$A^2=\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a^2 & 2a^2 \\ 2a^2 & 2a^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix} 2a^2 & 2a^2 \\ 2a^2 & 2a^2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4a^3 & 4a^3 \\ 4a^3 & 4a^3 \end{pmatrix}$$

i, en general

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1}a^n & 2^{n-1}a^n \\ 2^{n-1}a^n & 2^{n-1}a^n \end{pmatrix}$$

25. Resol l'equació AX=1 en què $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Hem de calcular la matriu inversa de la matriu A

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aleshores la matriu X és

$$X = A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

30. Busca una de les matrius X quadrada d'ordre 2 i simètriques de manera que AX=0 si sabem que $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

La matriu X que busquem, com que és simètrica, tindrà d'elements $\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$, l'element de la primera fila segona columna ha de ser igual a l'element de la segona fila primera columna. Si ara calculem el producte obtenim

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a-3c & 3c-3b \\ 2a-2c & 2c-2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Formem i resolem el sistema d'equacions

$3a-3c=0 \quad \Rightarrow a=c; \quad 3c-3b=0 \Rightarrow c=b$

Ha de ser $a=b=c$. Una matriu quadrada d'ordre 2 que tingui els quatre elements iguals

40. Una constructora fa una urbanització amb tres tipus d'habitatges: S (senzills) N (normals i L (luxe). Cada habitatge tipus S té 1 finestra gran, 7 mitjanes i una petita. Cada habitatge tipus N té 2 finestres grans, 9 mitjanes i 2 petites, i cada habitatge tipus L té 4 finestres grans, 10 finestres mitjanes i 3 finestres petites. Cada finestra gran té 4 vides i 8 frontisses, cada finestra mitjana 2 i 4 i cada finestra petita 1 i 2. Escriu una matriu que descrigui el nombre i la mida de les finestres de cada tipus d'habitatge i una altra matriu que expressi el nombre de vidres i de frontisses de cada tipus de finestra. Busca una matriu que expressi el nombre de vidres i de frontisses que calen en cada tipus d'habitatge

Les files són el tipus d'habitatges (S, N i L) i les columnes el tipus de finestres (G, M i P), la matriu és

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 2 & 9 & 2 \\ 4 & 10 & 3 \end{pmatrix}$$

Els elements de les finestres són els vidres i les frontisses (les columnes) i de finestres n'hi ha de tres classes (les files). La matriu és

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

El producte de les dues matrius són els vidres i les frontisses per a cada tipus d'habitatge

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 2 & 9 & 2 \\ 4 & 10 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 38 \\ 28 & 56 \\ 39 & 78 \end{pmatrix}$$

Per exemple la primera fila ens diu que en un habitatge del tipus senzill hi haurà 19 vidres i 38 frontisses

41. Una fàbrica produeix dos models de rentadores A i B en tres acabats N, L i S. Del model A produeix 400 unitats en l'acabat N, 200 en l'acabat L i 50 en l'acabat S. Del model B produeix 300 en l'acabat N, 100 en l'acabat L i 30 en l'acabat S. L'acabat N requereix 25 hores de taller i 1 hora d'administració, l'acabat L requereix respectivament 30 i 1,2 hores, i l'acabat S 33 hores i 1,3 hores. Representa tota aquesta informació en dues matrius. Busca una matriu que expressi les hores de taller i d'administració utilitzades per a cada un dels models

Les files són els models A o B, les columnes els acabats N,L i S

$$\begin{pmatrix} 400 & 200 & 50 \\ 300 & 100 & 30 \end{pmatrix}$$

En cada un dels tres acabats (files) tenim les hores de taller i administració (en columnes)

$$\begin{pmatrix} 25 & 1 \\ 30 & 1{,}2 \\ 33 & 1{,}3 \end{pmatrix}$$

El producte de les dues matrius dóna les hores de taller i administració per a cada un dels models A i B

$$\begin{pmatrix} 400 & 200 & 50 \\ 300 & 100 & 30 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 25 & 1 \\ 30 & 1{,}2 \\ 33 & 1{,}3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17650 & 705 \\ 11490 & 459 \end{pmatrix}$$