Logaritmes

Donat un nombre real $b > 0$, base dels logaritmes, es diu que el logaritme en base b d'un nombre a és x, quan a la base b li cal l'exponent x per donar a. Això és

$$\boxed{\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a}$$

Exemples

$$\log_2 8 = 3 \Leftrightarrow 2^3 = 8 \qquad \log_{10} 1.000 = 3 \Leftrightarrow 10^3 = 1.000$$
$$\log_{10} 10 = 1 \Leftrightarrow 10^1 = 10 \qquad \log_7 7 = 1 \Leftrightarrow 7^1 = 7$$
$$\log_{10} 100 = 2 \Leftrightarrow 10^2 = 100 \qquad \log_7 49 = 2 \Leftrightarrow 7^2 = 49$$
$$\log_5 25 = 2 \Leftrightarrow 5^2 = 25 \qquad \log_2 16 = 4 \Leftrightarrow 2^4 = 16$$
$$\log_2 4 = 2 \Leftrightarrow 2^2 = 4 \qquad \log_3 27 = 3 \Leftrightarrow 3^3 = 27$$

Alguns altres exemples no tan evidents

$\log_5 1 = 0$	$5^0 = 1$. Recordeu que un exponent zero dóna sempre un resultat 1
$\log_3 \frac{1}{9} = -2$	$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$. Recordeu els exponents negatius
$\log_{\sqrt{2}} 2 = 2$	$\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$. L'arrel de 2, elevada al quadrat, dóna 2
$\log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2}$	$5^{1/2} = \sqrt{5}$. Recordeu els exponents que són racionals
$\log_{45} 45 = 1$	$45^1 = 45$
$\log_{\frac{1}{3}} 3 = -1$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$

Propietats bàsiques dels logaritmes.

<u>El logaritme d'un producte és la suma dels logaritmes dels factors</u>

$\log_b (m \cdot n) = \log_b m + \log_b n$

Aquesta propietat és conseqüència del producte de potències de la mateixa base. Una manera de demostrar aquesta propietat és

Siguin

$\log_b (m \cdot n) = z$, i això vol dir que $b^z = m \cdot n$

$\log_b m = x$, i això vol dir que $b^x = m$

$\log_b n = y$, i això vol dir que $b^y = n$

Si ara fem el producte m per n obtenim

$m \cdot n = \begin{cases} = b^z \\ = b^x b^y = b^{x+y} \end{cases}$, i si les dues expressions han de ser igual, és z=x+y, és a dir

$\log_b (m \cdot n) = \log_b m + \log_b n$, si recordem quines expressions hem anomenat x, y i z

D'una manera semblant tenim, com segona propietat, que el logaritme d'una divisió és la resta dels logaritmes del dividend i del divisor

$$\log_b (m:n) = \log_b m - \log_b n$$

Es demostra de manera semblant a l'anterior i l'origen és la propietat de la divisió de potències de la mateixa base.
Una tercera propietat, conseqüència de la primera, és que el logaritme d'una potència de base s i exponent n és n vegades el logaritme de s

$$\log_b s^n = n \cdot \log_b s$$

Podem demostrar aquesta propietat fent servir la primera i considerant s^n una sèrie de n productes iguals
Com exemples d'aquestes propietats, i els logaritmes en una base qualsevol

$$\log(10 \cdot 12) = \log 10 + \log 12$$

$$\log(25:7) = \log 25 - \log 7$$

$$\log(2 \cdot 6 \cdot 7) = \log 2 + \log 6 + \log 7$$

$$\log 3^5 = 5 \log 3$$

$$\log \sqrt{7} = \log 7^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log 7$$

Bases habituals

Els logaritmes és poden calcular fent servir com base un nombre qualsevol b>0. Les bases habituals de càlcul són la base 10, es parla de logaritmes decimals, i la base el nombre e=2,71828.. i es parla de logaritmes neperians. En aquests dos casos no cal indicar la base, l'abreviatura que és fa servir és log (en els decimals) i ln (en els neperians. Corresponen a dues tecles habituals de càlcul en les calculadores científiques, les indicades $\boxed{\text{log}}$ i $\boxed{\text{ln}}$
En el cas dels logaritmes decimals cal observar els valors dels logaritmes de les successives potències de 10, és a dir

log 10=1	log 0,1=-1
log 100=2	log 0,01=-2
log 1.000=3	log 0,001=-3
log 10.000=4	log 0,0001=-4
...	...

on, evidentment, log 1=0

Càlcul de logaritmes

Podem conèixer el logaritme d'un nombre fent servir les eines de càlcul d'una calculadora científica, o bé a partir d'una taula de logaritmes. En aquestes s'acostumen a donar només la part decimal del logaritme, anomenada mantissa, la part entera del logaritme el podem saber fent servir els logaritmes decimals de nombres bàsics, les potències de 10

Exemple

Una taula logarítmica dóna només la mantissa dels logaritmes decimals. La mantissa del logaritme de 2 és 0,301030, la del logaritme de 20 la mateixa, la del logaritme de 200 la mateixa,...

En realitat els valors dels logaritmes d'aquest nombre són log 2=0,301030, ja que aquest logaritme ha d'estar entre 0 i 1
El log 20=1,301030, ja que el log 20 ha de ser un valor entre 1 i 2
El log 200=2,301030, ja que ha de ser un valor entre 2 i 3

Logaritmes i equacions exponencials

Hi ha equacions exponencials que es poden resoldre igualant la base. Un exemple d'aquestes és l'equació
$3^x = 9 \Rightarrow 3^x = 3^2 \quad \Rightarrow x = 2$
En aquests casos, quan la base no es pot igualar, la manera de resoldre aquestes equacions és igualar els logaritmes i fer servir les propietats. Per exemple
$3^x = 11$; prenem logaritmes en els dos termes $\log(3^x) = \log 11$; fem servir la tercera de les propietats $x \cdot \log 3 = \log 11$; i aïllem el valor de x; $x = \dfrac{\log 11}{\log 3} = 2{,}18$.
Observem el resultat: sabem que $3^2 = 9$ i que $3^3 = 27$ i nosaltres busquem un valor que faci $3^x = 11$. El valor de x ha d'estar entre 2 i 3, i més proper a 2 que a 3.

Exemples

$$5^x = 8 \Rightarrow \log(5^x) = \log 8 \Rightarrow x\log 5 = \log 8 \Rightarrow x = \frac{\log 8}{\log 5} = 1{,}292$$

$$10^x = 50 \Rightarrow \log(10^x) = \log 50 \Rightarrow x\log 10 = \log 50 \Rightarrow x = \frac{\log 50}{\log 10} = 1{,}699$$

$$7^{2x+3} = 22 \Rightarrow \log(7^{2x+3}) = \log 22 \Rightarrow (2x+3)\log 7 = \log 22 \Rightarrow 2x+3 = \frac{\log 22}{\log 7}$$

$$\Rightarrow 2x+3 = 1{,}588 \Rightarrow 2x = -1{,}412 \Rightarrow x = -\frac{1{,}412}{2} = -0{,}706$$

Canvi de base de logaritmes

Si volem calcular el logaritme d'un nombre en una base qualsevol (b>0) podem considerar l'exercici com una equació exponencial com les anteriors. Per exemple si ens demanen el logaritme en base 5 de 8 serà
$\log_5 8 = x \Rightarrow 5^x = 8 \Rightarrow x = 1{,}292$
ja que aquesta és la primera de les equacions que abans hem calculat

Alguns càlculs
Les propietats permeten calcular molts logaritmes si en sabem alguns. Si sabem, per exemple, que log 2=0,301, podem calcular
$\log 20 = \log(2 \cdot 10) = \log 2 + \log 10 = 0{,}301 + 1 = 1{,}301$
on hem fet servir que log10=1
$\log 8 = \log 2^3 = 3 \cdot \log 2 = 3 \cdot 0{,}301 = 0{,}903$
$\log 5 = \log\left(\dfrac{10}{2}\right) = \log 10 - \log 2 = 1 - 0{,}301 = 0{,}699$