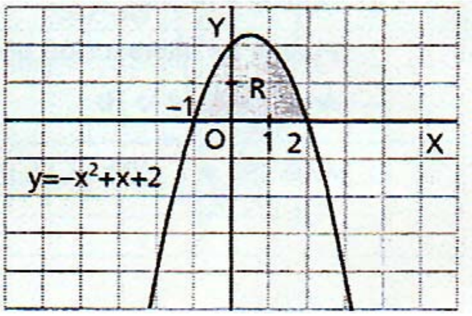
2. Representa el recinte de la regió del pla limitada per la funció $f(x) = -x^2 + x + 2$ i l'eix OX. Calcula'n l'àrea

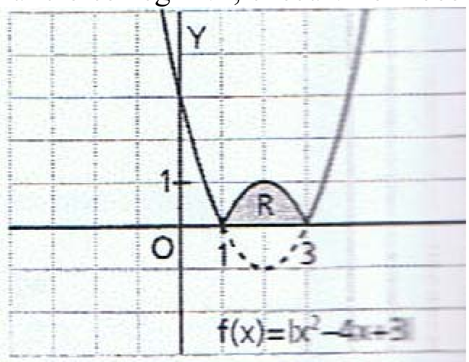


La paràbola talla l'eix OX en els punts –1 i 2, entre ells la funció és positiva, hem de calcular

$$\int_{-1}^{2}(-x^2 + x + 2)dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\Big]_{-1}^{2} = \left(-\frac{8}{3} + \frac{4}{2} + 4\right) - \left(-\frac{-1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right) = \frac{9}{2}$$

3. Calcula l'àrea de la regió del pla limitada per la corba $f(x) = \left|x^2 - 4x + 3\right|$ i l'eix OX

La paràbola $y = x^2 - 4x + 3$ talla l'eix OX en els punts 1 i 3. En aquest interval la funció és negativa, el seu valor absolut tindrà la gràfica

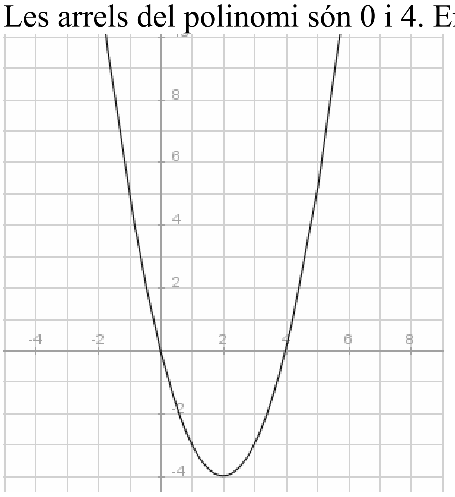


i l'àrea demanada serà

$$A = -\int_{1}^{3}(x^2 - 4x + 3)dx = -\left[\frac{x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 3x\right]_{1}^{3} = \frac{4}{3}$$

4. Calcula l'àrea de la regió del pla limitada per la funció $f(x) = x^2 - 4x$ i l'eix OX

Les arrels del polinomi són 0 i 4. En aquest interval la funció té valors negatius

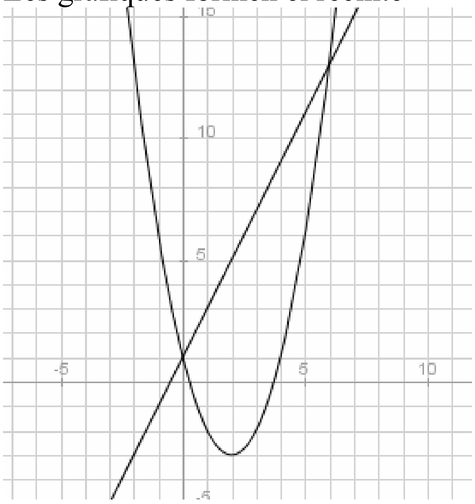


L'àrea serà

$$A=-\int_0^4 (x^2-4x)dx=-\left[\frac{x^3}{3}-\frac{4x^2}{2}\right]_0^4=-\left(\frac{4^3}{3}-\frac{4\cdot 4^2}{2}\right)=\frac{32}{3}$$

6. Dibuixa les gràfiques de la recta $y=2x+1$ i la paràbola $y=x^2-4x+1$ i comprova que entre les dues delimiten un recinte tancat. Calcula l'àrea d'aquest recinte amb l'ajuda del càlcul integral

Les gràfiques formen el recinte



Calculem els punts de tall resolent el sistema format per

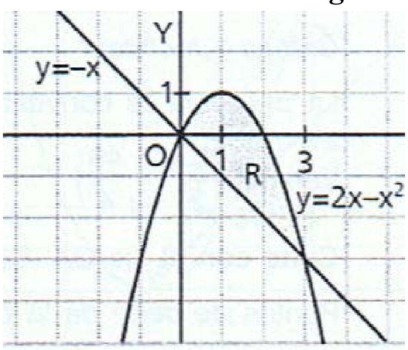
$$\begin{cases} y=2x+1 \\ y=x^2-4x+1 \end{cases} \Rightarrow 2x+1=x^2-4x+1 \Rightarrow 0=x^2-6x \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=6 \end{cases}$$

es tallen en els punts x=0 i x=6

L'àrea serà

$$A=\int_0^6 \left(x^2-4x+1\right)-(2x+1)dx=\int_0^6 (x^2-6x)dx=\left.\frac{x^3}{3}-3x^2\right]_0^6=36$$

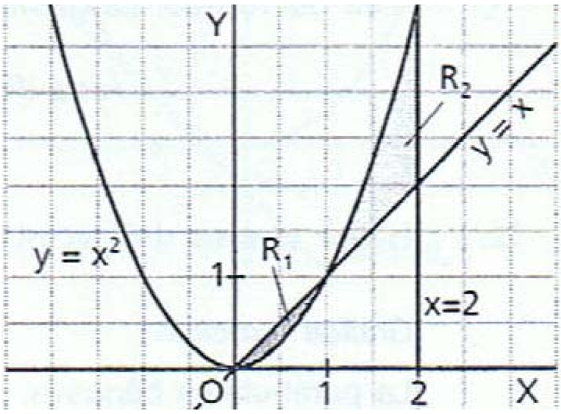
7. Calcula l'àrea de la figura limitada per la corba $y=2x-x^2$ i la recta $y=-x$



Les funcions es tallen en els punts x=0 i x=3. L'àrea és

$$\int_0^3 (2x-x^2)-(-x)dx=\int_0^3 (2x-x^2+x)dx=\int_0^3 (3x-x^2)dx=\left.\frac{3x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^3=\frac{27}{6}$$

8. Calcula l'àrea de la figura limitada per la corba $y=x^2$ i les rectes $y=x$, $x=0$ i $x=2$



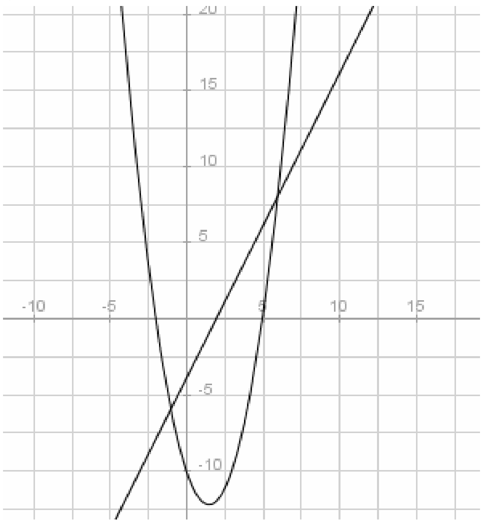
Des de x=0 fins x=1 la recta té valors superiors a la paràbola. Des de x=1 fins x=2 la paràbola té valors superiors al de la recta. L’àrea és la suma de les àrees de dos recintes

$$A_1 = \int_0^1 (x - x^2)dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{1}{6}$$

$$A_2 = \int_1^2 (x^2 - x)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\Big]_1^2 = \left(\frac{8}{3} - 2\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{6}$$

L’àrea total serà la suma: 1

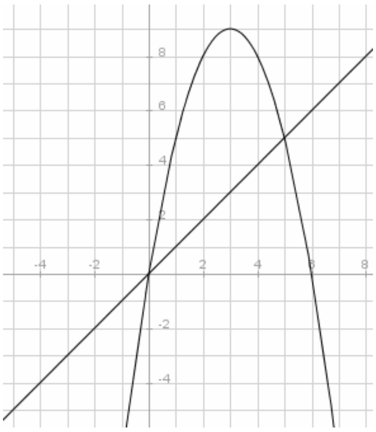
11. Calcula l’àrea de la regió limitada per la corba $y = x^2 - 3x - 10$ i la recta $y = 2x - 4$



La paràbola és còncava, talla la recta en els punts x=-1 i x=6 i la recta té, en aquest interval, valors superiors a la paràbola, l’àrea és

$$\int_{-1}^{6} [(2x - 4) - (x^2 - 3x - 10)dx = \int_{-1}^{6} (-x^2 + x + 6)dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x\Big]_{-1}^{6} = \frac{343}{6}$$

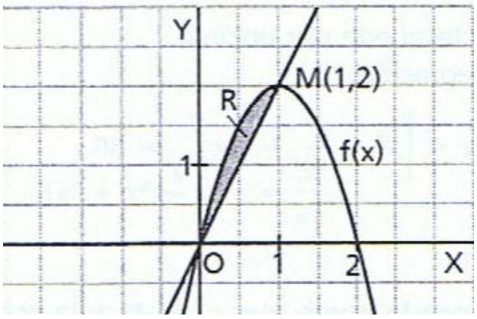
12. Calcula l’àrea del recinte limitat per la corba $y = x(6 - x)$ i la recta y=x



La paràbola i la recta es tallen en els punts x=0 i x=5 i en aquest interval la paràbola té valors superiors a la recta. L’àrea és

$$\int_0^5 (6x - x^2 - x)dx = \int_0^5 (5x - x^2)dx = \left. \frac{5x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^5 = \frac{125}{6}$$

13. La representació gràfica de la figura és una funció polinòmica de grau 2, amb un màxim a (1,2). Quin és el valor de l’expressió i del recinte ombrejat?



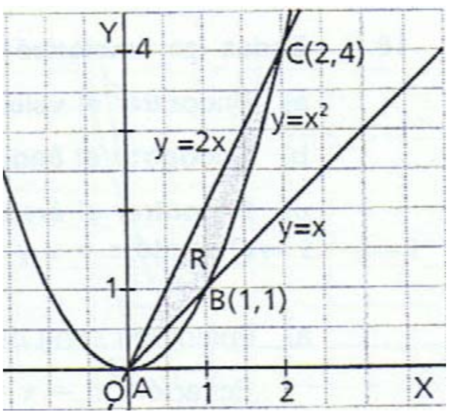
L’equació de la paràbola d’arrels 0 i 2 és de la forma $f(x) = kx(x-2) = kx^2 - 2kx$
donat que ha de passar per (1,2) podem calcular el valor de k

$2 = k - 2k = -k \Rightarrow f(x) = -2x(x-2) = 4x - 2x^2$

D’altra banda l’equació de la recta és $y = 2x$, ja que passa per l’origen i té pendent 2. L’àrea demanada serà

$$A = \int_0^1 (4x - 2x^2 - 2x)dx = \int_0^1 (2x - 2x^2)dx = \left. x^2 - \frac{2x^3}{3} \right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

14. Calcula l’àrea del recinte pla determinat per les rectes $y = x$; $y = 2x$ i la paràbola $y = x^2$



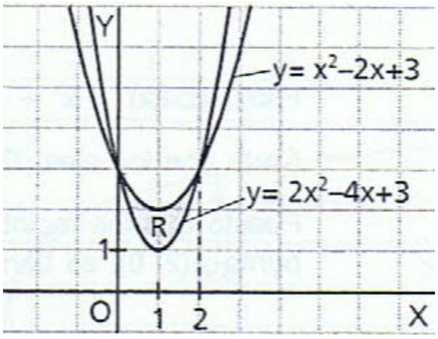
Calculem els punts de tall de rectes i paràbola. La recta $y = x$ i la paràbola es tallen a (0,0) i a (1,1). La recta $y = 2x$ i la paràbola és tallen a (0,0) i a (2,4). L'àrea indicada serà la integral

$$A = \int_0^1 (2x - x)dx + \int_1^2 (2x - x^2)dx$$

com a suma de dues regions. La primera és l'interval [0,1] limitat per dues rectes, i la segona l'interval [1,2] limitat per la recta i la paràbola.
L'àrea és

$$A = \left.\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left. x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{7}{6}$$

19. Calcula l'àrea compresa entre les paràboles $y = x^2 - 2x + 3$ **i** $y = 2x^2 - 4x + 3$



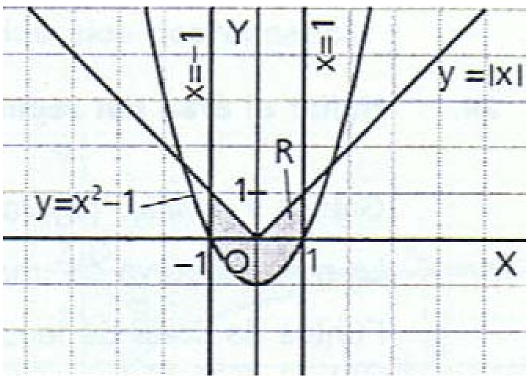
Calculem els punts de tall de les dues paràboles resolent el sistema d'equacions

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x + 3 \\ y = 2x^2 - 4x + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

En aquest interval la paràbola $y = x^2 - 2x + 3$ té valors superior a la segona. L'àrea serà la integral

$$\int_0^2 [(x^2 - 2x + 3) - (2x^2 - 4x + 3)dx = \int_0^2 (-x^2 + 2x)dx = \left. -\frac{x^3}{3} + x^2 \right]_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$

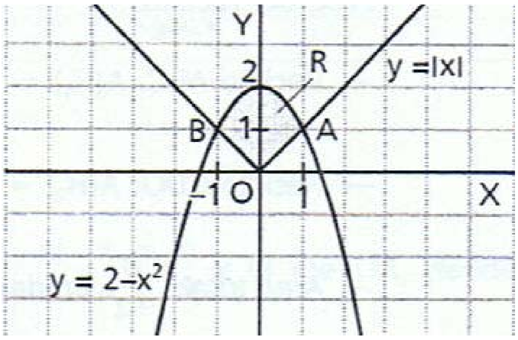
20. Calcula l'àrea de la regió delimitada per les corbes $y = |x|$ **i** $y = x^2 - 1$ **i les rectes** $x = -1$ **i** $x = 1$



Fent servir la simetria de la figura, l'àrea demanada és

$$A = 2\int_0^1 (x - x^2 + 1)dx = 2 \cdot \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x\right]_0^1 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 1\right) = \frac{7}{3}$$

21. Calcula l'àrea de la figura limitada per les corbes $y = 2 - x^2$ **i** $y = |x|$



Fent servir la simetria de la figura, l'àrea demanada és

$$A = 2\int_0^1 (2 - x^2 - x)dx = 2\cdot\left[2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 2\cdot\left(2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{3}$$

22. Donada la funció $f(x)$ real definida per

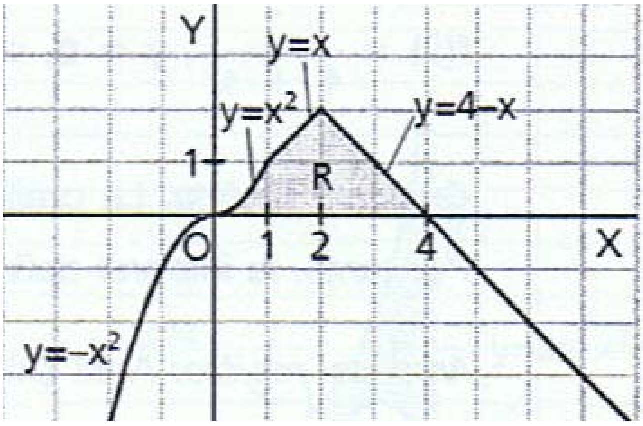
$$f(x) = \begin{cases} x|x| & x \le 1 \\ x & 1 < x \le 2 \\ 4 - x & 2 < x \end{cases}$$

Busca els punts en què $f(x)$ és derivable. Estudia si hi ha màxims i mínims relatius de $f(x)$ i, si n'hi ha, determina'ls. Calcula $\int_0^4 3f(x)dx$

Podem definir la funció de la manera següent

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & x \le 0 \\ x^2 & 0 < x \le 1 \\ x & 1 < x \le 2 \\ 4 - x & 2 < x \end{cases}$$

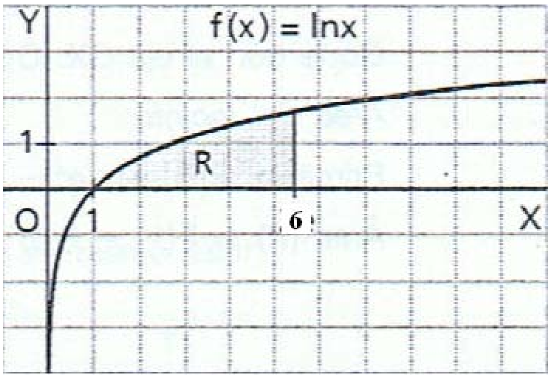
La funció és contínua per a tot valor real. No és derivable en x=1 i x=2 ja que les derivades laterals no coincideixen. Té un màxim relatiu en el punt (2,2). La gràfica de la funció és:



La integral demanada s'ha de calcular com suma de tres intervals

$$\int_0^4 3f(x)dx = 3\left[\int_0^1 x^2dx + \int_1^2 xdx + \int_2^4 (4-x)dx\right] = 3\left[\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 + \left[4x - \frac{x^2}{2}\right]_2^4\right] = \frac{27}{2}$$

27. Busca l'àrea limitada per la corba $y = \ln x$ i les rectes $y = 0$ i $x = 6$



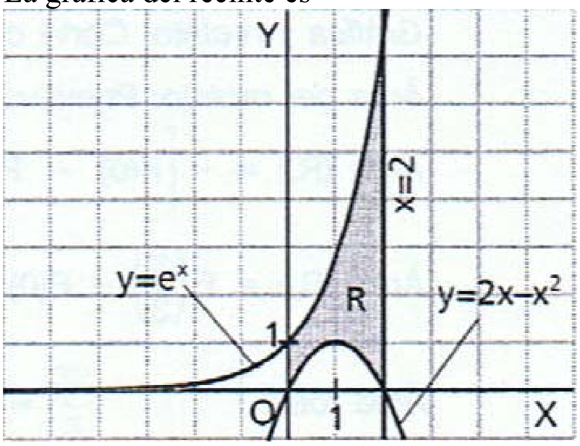
La funció $f(x) = \ln x$ talla l'eix OX en el punt x=1. Hem de calcular

$$\int_1^6 \ln x dx = x \ln x - x\Big]_0^6 = \left(6\ln 6 - 6\right) - (\ln 1 - 1) = 6\ln 6 - 5$$

On el càlcul de la integral $\int \ln x dx$ es fa per parts

30. Calcula l'àrea limitada per les gràfiques $y = 2x - x^2$, $y = e^x$, $x = 0$, $x = 2$

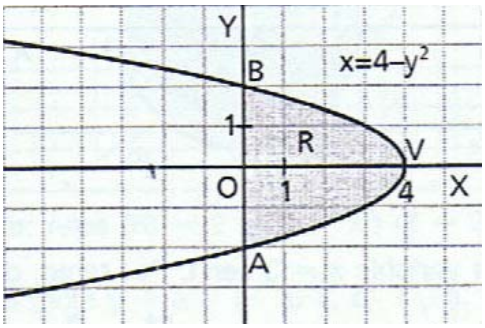
La gràfica del recinte és



i l'àrea demanada

$$A = \int_0^2 \left(e^x - (2x - x^2)\right)dx = \int_0^2 (e^x - 2x + x^2)dx = e^x - x^2 + \frac{x^3}{3}\Big]_0^2 = e^2 - \frac{7}{3}$$

37. Calcula l'àrea de la regió del pla tancada per la paràbola $x = 4 - y^2$ i l'eix de coordenades



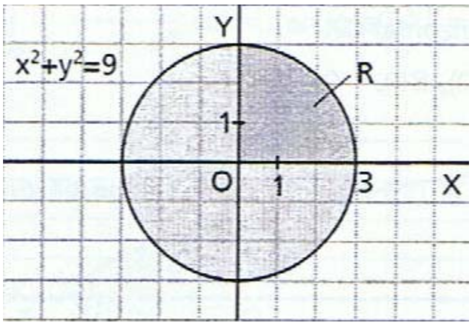
És una paràbola d'eix horitzontal. En funció de x és $f(x) = \sqrt{4 - x}$. El tall amb l'eix OX és el punt (4,0). La meitat de l'àrea, la que queda sobre l'eix OX, serà

$$A = \int_0^4 \sqrt{4 - x}dx = \frac{2(4 - x)^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg]_0^4 = \frac{16}{3}$$

i l'àrea demanada és el doble $\frac{32}{3}$

40. Demostra, mitjançant el càlcul integral, que l'àrea d'un cercle de 3 unitats de radi és, precisament, de 9π unitats

L'equació d'una circumferència de centre (0,0) i radi 3 és $x^2+y^2=3^2$



Recordem el càlcul de la integral de

$$\int \cos^2 x dx = \frac{x+\sin x\cos x}{2}$$

i considerem la quarta part de l'àrea del cercle com

$$A=\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$$

Busquem una primitiva de

$$\int \sqrt{9-x^2}\,dx = \begin{bmatrix} x=3\sin t \\ dx=3\cos t dt\end{bmatrix} = \int 3\sqrt{9-9\sin^2 t}\cos t dt = 9\int \cos^2 t dt = 9\frac{t+\sin t\cos t}{2}$$

si desfem el canvi de variable

$$\frac{9}{2}\left(\arcsin\frac{x}{3}+\frac{x}{3}\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}\right)$$

Aplicant el resultat a la integral definida anterior obtenim

$$\frac{9}{2}\left(\arcsin 1+1\sqrt{1-\frac{9}{9}}\right)=\frac{9}{2}\frac{\pi}{2}=\frac{9\pi}{4}$$

I l'àrea de tot el cercle 9π

Si no recuperem la variable x i seguim amb la variable t aleshores els intervals d'integració han de canviar a

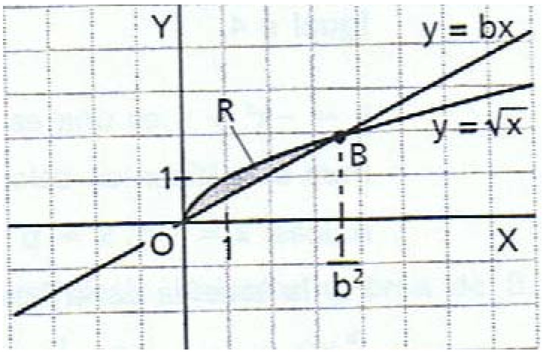
$$x=3\sin t \quad \Rightarrow \begin{cases} x=0 & t=0 \\ x=3 & t=\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

i la quarta part de l'àrea

$$\frac{9}{2}(t+\sin t\cos t)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{9}{2}\frac{\pi}{2}=\frac{9\pi}{4}$$

43. Si sabem que l'àrea de la regió compresa entre la corba $y=\sqrt{x}$ i la recta $y=bx$ és 1, calcula el valor de b

La corba i la recta és tallen en (0,0) i en $x=\frac{1}{b^2}$, i en aquest interval la corba té valors superiora a la recta



Plantegem

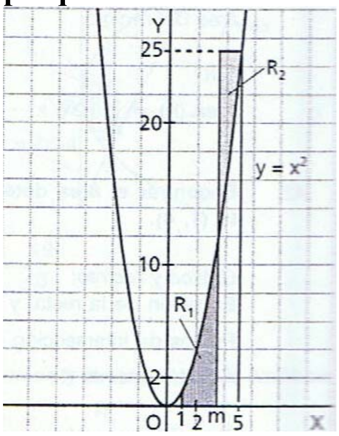
$$1=\int_0^{\frac{1}{b^2}}(\sqrt{x}-bx)dx=\left.\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{bx^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{b^2}}$$

dóna l'equació

$$1=\frac{2}{3}b^{-3}-\frac{1}{2}b^{-3}=\frac{1}{6}b^{-3}$$

d'on $b=\frac{1}{\sqrt[3]{6}}$

45. Tenim la paràbola d'equació $y=x^2$ que mostra la figura. Busca el valor de m perquè les àrees de les superfícies ratllades siguin iguals



Si calculem l'àrea a l'interval [1,m] és

$$\int_1^m x^2dx=\left.\frac{x^3}{3}\right]_1^m=\frac{m^3}{3}-\frac{1}{3}$$

I l'àrea de la segona zona és

$$25(5-m)-\int_m^5 x^2dx=25(5-m)-\left[\frac{x^3}{3}\right]_m^5=25(5-m)-\left[\frac{5^3}{3}-\frac{m^3}{3}\right]$$

Igualant les dues àrees

$$\frac{m^3}{3}-\frac{1}{3}=25(5-m)-\left[\frac{5^3}{3}-\frac{m^3}{3}\right]\quad\Rightarrow-\frac{1}{3}=125-25m-\frac{125}{3}\quad\Rightarrow 25m=125-\frac{124}{3}=\frac{251}{3}$$

d'on $m=\frac{251}{75}$