1

$$\int_0^2 (x+1)^6 dx = \frac{(x+1)^7}{7}\Big]_0^2 = \frac{3^7}{7} - \frac{1^7}{7} = \frac{3^7-1}{7} = \frac{2186}{7}$$

$$\int_{-2}^{1} \frac{dx}{2-x} = \begin{bmatrix} t = 2-x \\ dt = -dx \end{bmatrix} = \int \frac{-dt}{t} = -\ln t = -\ln(2-x)\Big]_{-2}^{1} = -\ln 1 + \ln 4 = \ln 4$$

$$\int_{-1}^{0} x^2 e^x dx = \begin{bmatrix} u = x^2 & dv = e^x dx \\ du = 2x dx & v = e^x \end{bmatrix} = x^2 e^x - 2\int x e^x dx = \begin{bmatrix} u = x & dv = e^x dx \\ du = dx & v = e^x \end{bmatrix} =$$

$$x^2 e^x - 2\left(x e^x - \int e^x dx\right) = x^2 e^x - 2x e^x + 2x\Big]_{-1}^{0} = e^x\left(x^2 - 2x + 2\right)\Big]_{-1}^{0} =$$

$$= 2e^0 - e^{-1}(1+2+2) = 2 - \frac{5}{e}$$

$$\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} sin2xdx = -\frac{\cos 2x}{2}\Big]_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} = \left(-\frac{\cos \boldsymbol{p}}{2}\right) - \left(-\frac{\cos -\boldsymbol{p}}{2}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

$$\int_0^{\frac{p}{4}} tanx\, dx = -\ln(\cos x)\Big]_0^{\frac{p}{4}} = -\ln(\cos \frac{\boldsymbol{p}}{4}) + \ln(\cos\ 0) = \ln 1 - \ln \frac{\sqrt{2}}{2} = -\ln \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\ln 2}{2}$$

$$\int_2^4 \frac{x}{x^2-1} dx = \frac{1}{2}\ln(x^2-1)\Big]_2^4 = \frac{1}{2}(\ln 15 - \ln 3) = \frac{1}{2}\ln 5$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \begin{bmatrix} t = 1+x^2 \\ dt = 2x dx \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} 2t^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+x^2}\Big]_{-1}^{1} = \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$$

$$\int_2^4 \frac{x^3}{x^2-1} dx = \int\left(x + \frac{x}{x^2-1}\right)dx = \int\left(x + \frac{1/2}{x+1} + \frac{1/2}{x-1}\right)dx = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln(x+1) + \frac{1}{2}\ln(x-1)\Big]_2^4 =$$

$$= 8 + \frac{1}{2}\ln 5 + \frac{1}{2}\ln 3 - 2 - \frac{1}{2}\ln 3 + \frac{1}{2}\ln 1 = 6 + \frac{1}{2}\ln 5$$

2. Calcula $\int_0^p \cos xdx$ i l'àrea sota la corba de la funció f(x)=cos x en l'interval [0,p]

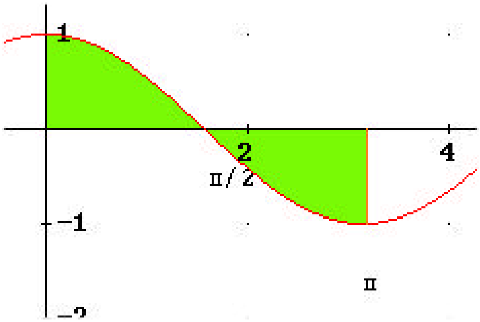
La funció cos x és positiva en $\left(0,\frac{p}{2}\right)$ i negativa en $\left(\frac{p}{2},p\right)$. La integral definida és

$$\int_0^p \cos xdx = sin\ x\Big]_0^p = sin(p) - sin0 = 0$$

Però l'àrea demanada serà

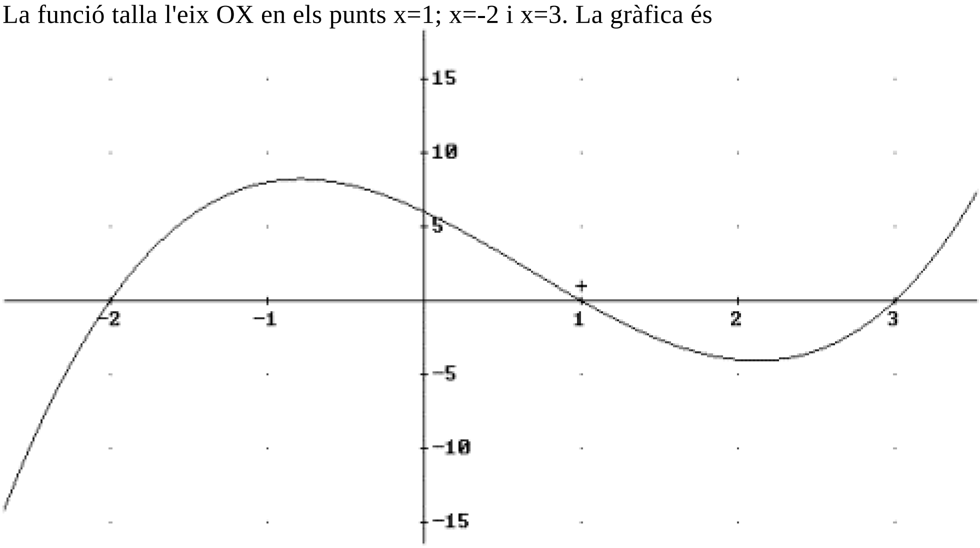
$$A = \int_0^{\frac{p}{2}} \cos xdx + \left|\int_{\frac{p}{2}}^{p} \cos xdx\right| = sin\ x\Big]_0^{\frac{p}{2}} + \left|sin\ x\Big]_{\frac{p}{2}}^{p}\right| = sin\left(\frac{p}{2}\right) - sin0 + \left|sin\,p - sin\left(\frac{p}{2}\right)\right| =$$

$$1 - 0 + |0 - 1| = 2$$



3. Calcula l'àrea entre el gràfic de la funció $f(x) = (x-1)(x^2 - x - 6)$ i l'eix OX

La funció talla l'eix OX en els punts x=1; x=-2 i x=3. La gràfica és



Hi ha una zona on la funció és positiva, d'àrea

$$\int_{-2}^{1} f(x)dx = \int_{-2}^{1}(x^3 - 2x^2 - 5x + 6)dx = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x\Big]_{-2}^{1} = \frac{37}{12} - \left(-\frac{38}{3}\right) = \frac{63}{4}$$

i la segona on la funció és negativa, d'àrea

$$\left|\int_1^3 (x^3 - 2x^2 - 5x + 6)dx\right| = \left|\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x\Big]_1^3\right| = \left|-\frac{9}{4} - \frac{37}{12}\right| = \frac{16}{3}$$

L'àrea que tanca és la suma de

$$\frac{63}{4}+\frac{16}{3}=\frac{253}{12}$$

4. Calcula l'àrea entre el gràfic de la funció següent $f(x)=x^3-3x$ i l'eix OX

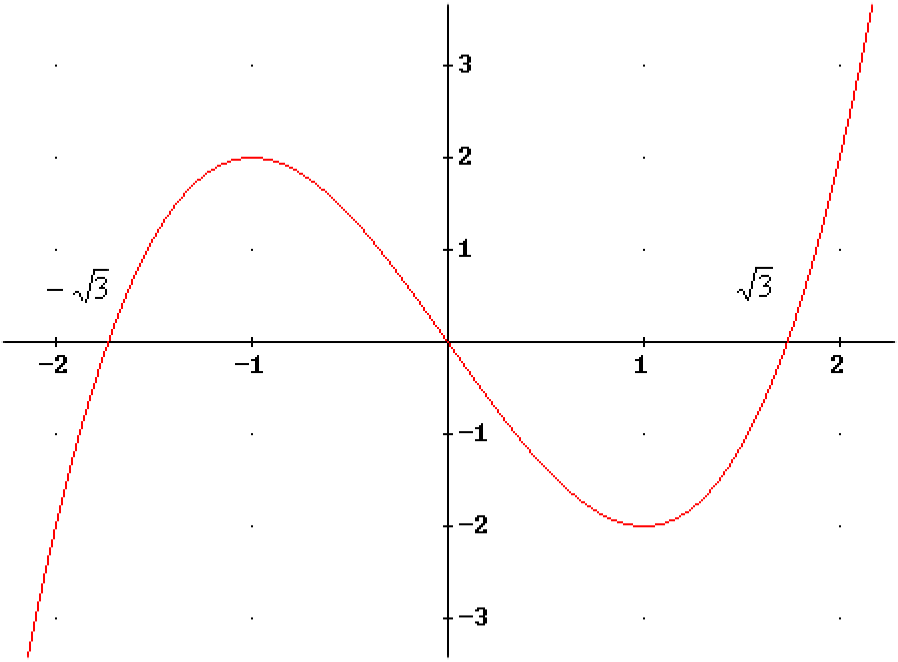
Les arrels de la funció són

$$x^3-3x=0 \quad \Rightarrow \quad x(x^2-3)=0 \quad \Rightarrow x=\begin{cases} 0 \\ \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

La derivada de la funció és

$$y'=3x^2-3=3(x^2-1)$$

positiva quan $|x|>1$. Té un màxim en x=-1 i un mínim en x=1. La gràfica és



Observem com la funció té simetria imparella.

$$f(-x)=(-x)^3-3(-x)=-x^3+3x=-f(x)$$

L'àrea demanada és el doble de

$$\int_{-\sqrt{3}}^{0}(x^3-3x)dx=\left.\frac{x^4}{4}-\frac{3x^2}{2}\right]_{-\sqrt{3}}^{0}=-\left(\frac{9}{4}-\frac{9}{2}\right)=\frac{9}{4}$$

L'àrea és $\dfrac{9}{2}$

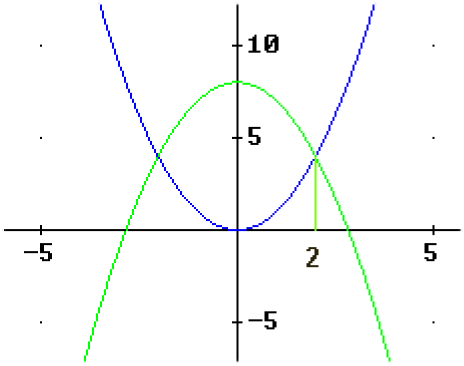
5. Calcula l'àrea de la regió compresa entre els gràfics de les funcions $f(x)=x^2$ i $g(x)=-x^2+8$

Les dues funcions són dues paràboles, la primera còncava de vèrtex (0,0), i la segona convexa de vèrtex (0,8).

Les dues funcions es tallen en la solució de l'equació

$$x^2=-x^2+8 \quad \Rightarrow \quad 2x^2=8 \quad \Rightarrow \quad x^2=4 \quad \Rightarrow \quad x=\pm 2$$

Les gràfiques són



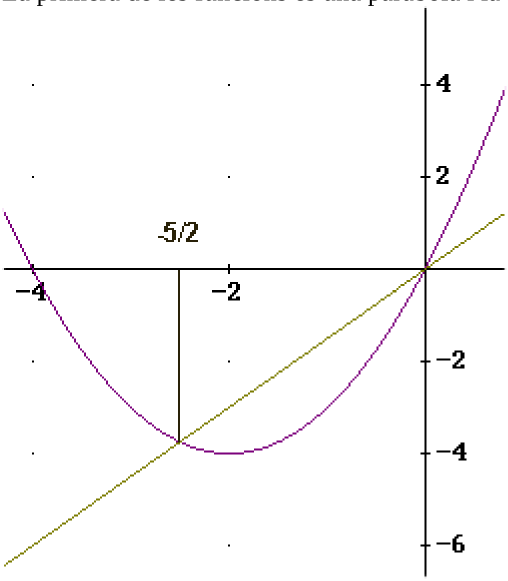
Fent servir la simetria de les funcions l'àrea demanada és el doble de

$$\int_0^2 (-x^2+8-x^2)dx = \int_0^2 (-2x^2+8)dx = -\frac{2x^3}{3}+8x\Big]_0^2 = \frac{32}{3}$$

L'àrea és el doble: $\frac{64}{3} \quad u^2$

6. Representa gràficament la funció $f(x) = x^2 + 4x$ i $g(x) = \frac{3x}{2}$. Calcula l'àrea de la regió compresa entre els dos gràfics

La primera de les funcions és una paràbola i la segona una recta. Les gràfiques són



Si resolem el sistema format per les dues equacions obtenim de solucions x=0 i x=-5/2. L'àrea demanada serà

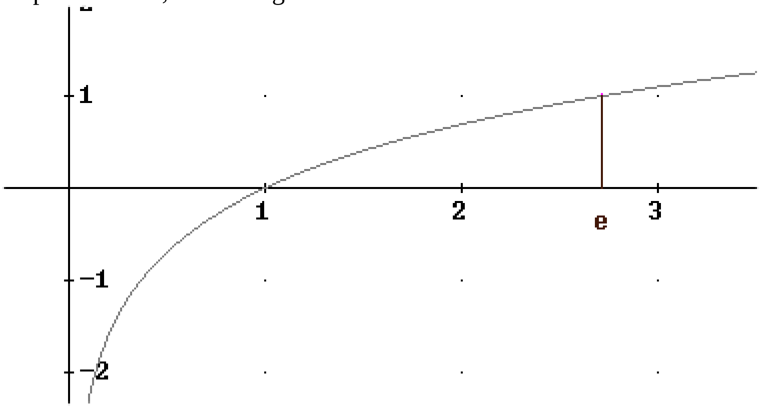
$$-\int_{-\frac{5}{2}}^{0} (x^2+4x-\frac{3x}{2})dx$$

Les dues funcions són negatives en l'interval, per això hem de considerar el valor absolut del resultat o canviar el signe. El càlcul és

$$A = -\left(\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{4}\Big]_{-\frac{5}{2}}^{0}\right) = \left(-\frac{5^3}{3\cdot 2^3}+\frac{5^3}{4\cdot 2^2}\right) = \frac{125}{48}$$

7. Representa gràficament la funció $f(x) = \ln x$ en l'interval [1,e]. Calcula l'àrea sota aquesta corba en aquest interval

La funció ln és una funció creixent quan està definida (per valors x>0). Les imatges de 1 i e són, respectivament, 0 i 1. La gràfica és



Hem de calcular

$$\int_1^e \ln x \, dx$$

Si calculem per parts una primitiva de ln x obtenim

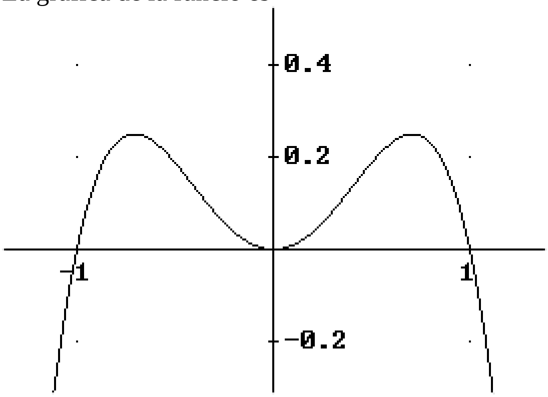
$$\int \ln x \, dx = \begin{bmatrix} u = \ln x & dv = dx \\ du = \frac{1}{x} dx & v = x \end{bmatrix} = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - x = x(\ln x - 1)$$

I l'àrea demanada

$$A = x(\ln x - 1)\Big]_1^e = e(\ln e - 1) - 1(\ln 1 - 1) = e \cdot 0 - 1 \cdot (-1) = 1\, u^2$$

8. La funció $f(x) = x^2 - x^4$ presenta simetria parella en el seu gràfic. Calcula l'àrea sota aquesta corba i l'eix OX. Pots fer-ho calculant només una integral?

La gràfica de la funció és

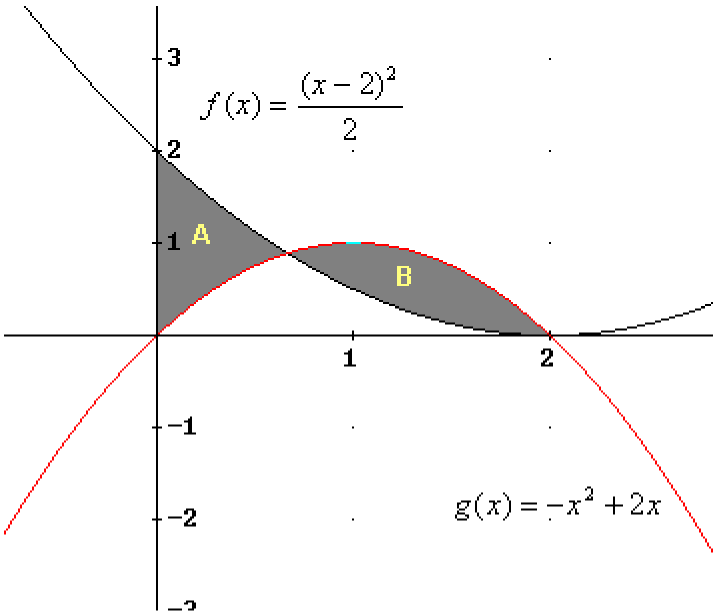


L'àrea està definida en l'interval [0,1]. Serà el doble del valor de la integral

$$\int_0^1 (x^2 - x^4) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\Big]_0^1 = \frac{2}{15}$$

d'on l'àrea demanada és $\frac{4}{15} u^2$

9. Calcula l'àrea ombrejada en la figura. Les funcions representades són $f(x) = \frac{(x-2)^2}{2}$ i $g(x) = -x^2 + 2x$



Els punts de tall de les dues funcions són les solucions del sistema d'equacions

$$\begin{cases} y=-x^2+2x \\ y=\dfrac{(x-2)^2}{2} \end{cases} \Rightarrow -x^2+2x=\frac{(x-2)^2}{2} \quad \Rightarrow -2x^2+4x=x^2-4x+4$$

les solucions de l'equació són

$$3x^2-8x+4=0 \quad \Rightarrow x=\frac{8\pm\sqrt{64-48}}{6}=\frac{8\pm 4}{6}=\begin{cases} =2 \\ =\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

L'àrea senyalada com A serà la integral

$$A=\int_0^{\frac{2}{3}}\left(\frac{(x-2)^2}{4}-(-x^2+2x)\right)dx=\int_0^{\frac{2}{3}}\left(\frac{5x^2-12x+4}{4}\right)dx$$

$$A=\frac{1}{4}\left(\frac{5x^3}{3}-6x^2+4x\right)\Bigg]_0^{\frac{2}{3}}=\frac{1}{4}\left(\frac{5\cdot 2^3}{3^4}-\frac{6\cdot 2^2}{3^2}+\frac{4\cdot 2}{3}\right)=\frac{10}{81}$$

L'àrea marcada B és

$$B=\int_{\frac{2}{3}}^{2}\left(-x^2+2x-\frac{(x-2)^2}{4}\right)dx=\int_{\frac{2}{3}}^{2}\left(\frac{-5x^2+12x-4}{4}\right)dx$$

de resultat

$$B=\frac{1}{4}\left(-\frac{5x^3}{3}+6x^2-4x\right)\Bigg]_{\frac{2}{3}}^{2}=\frac{64}{81}$$

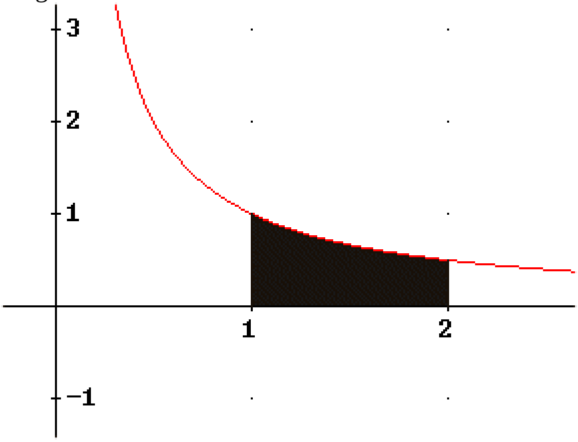
L'àrea demanada és la suma de A+B

10. Calcula l'àrea compresa entre el gràfic de la funció $f(x)=\frac{1}{x}$, l'eix d'abscisses i les ordenades x=1 i x=2

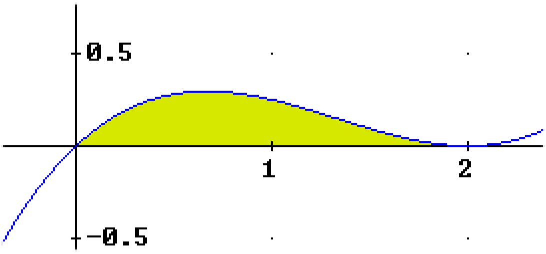
Hem de calcular

$$\int_1^2\frac{1}{x}dx=\ln x\Big]_1^2=\ln 2-\ln 1=\ln 2$$

La gràfica de la funció és



11. En una comarca el riu adopta la forma de la funció $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2 + x$ **i es tallat per un camí que té la direcció positiva de l'eix OX. Prenent com unitat el Km calcula el valor de la superfície del camp comprès entre el riu i el camí**



La funció

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2 + x$$

talla l'eix OX en x=0 i en les arrels de l'equació

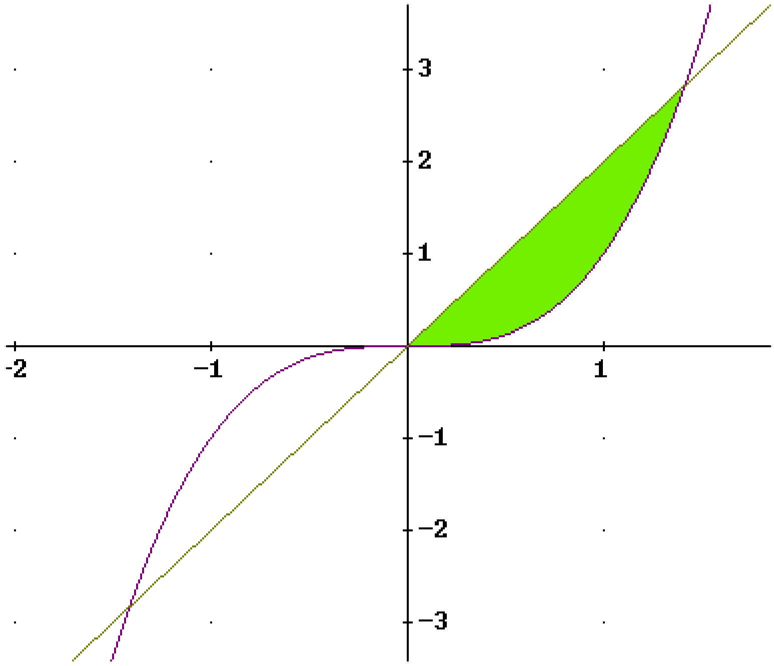
$$\frac{1}{4}x^2 - x + 1 = 0$$

que és x=2. Hem de calcular l'àrea definida per

$$\int_0^2 \left(\frac{1}{4}x^3 - x^2 + x \right) dx = \left. \frac{x^4}{16} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = 1 - \frac{8}{3} + 2 = \frac{1}{3}$$

12. Troba l'àrea de la zona limitada per les funcions $f(x) = x^3$ **i** $g(x) = 2x$

Les funcions es tallen en $x = 0$ i $x = \pm\sqrt{2}$. La gràfica és

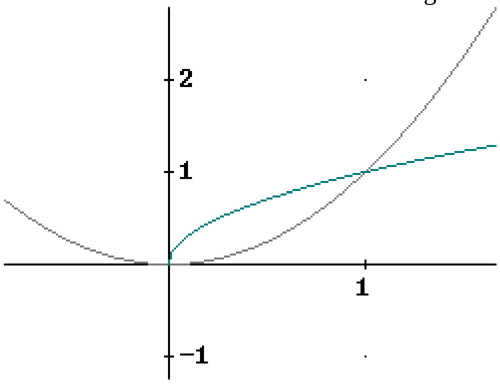


Si aprofitem la simetria de la funció, l'àrea demanada serà el doble de

$$\int_0^{\sqrt{2}} (2x - x^3)dx = x^2 - \frac{x^4}{4}\Bigg]_0^{\sqrt{2}} = 2 - 1 = 1$$

13. Troba l'àrea compresa entre les funcions $f(x) = x^2$ **i** $g(x) = \sqrt{x}$

Les funcions es tallen en x=0 i x=1. La gràfica és

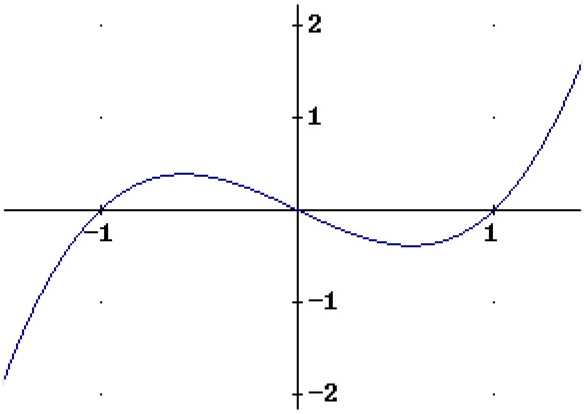


Hem de calcular

$$\int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right) dx = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} - \frac{x^3}{3}\Bigg]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

14. Calcula l'àrea determinada per la funció $y = x^3 - x$ **i l'eix d'abscisses.**

Les solucions de $x^3 - x = 0$ son x=0, x=-1 i x=1. La gràfica de la funció és



Fent servir la simetria de la funció, l'àrea demanada serà el doble de la integral

$$\int_{-1}^{0} (x^3 - x)dx = \left.\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} = 0 - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

L'àrea que tanca la funció és $\frac{1}{2}u^2$