1 Calcula el vector d'origen el punt A(2,1,7) i final el punt B(-1,0,3)

Calculem el vector $\vec{AB}$ fent final menys origen

$\vec{AB} = (-1,0.3) - (2,1,7) = (-3,-1,-4)$

2 Si el vector AB=(1,2,-3) i les coordenades del punt B són B(2,0,1), calculeu les coordenades del punt A

El vector $\overrightarrow{AB} = (1,2,-3) = (2,0,1) - (a_1, a_2, a_3)$, d'on obtenim

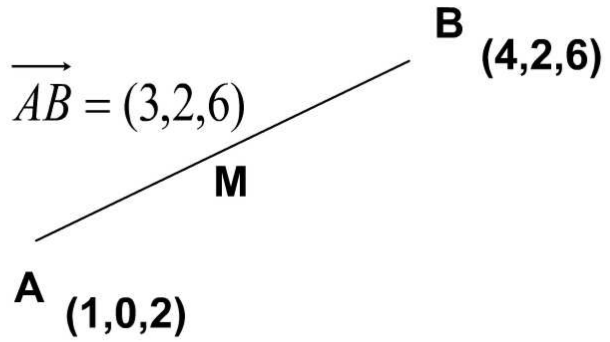
$$\begin{cases} 1 = 2 - a_1 \\ 2 = 0 - a_2 \\ -3 = 1 - a_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = -2 \\ a_3 = 4 \end{cases}$$

i les coordenades de A són $A = (1,-2,4)$

3 Calculeu el punt mitjà del segment d'extrems A(1,0,2) i B(4,2,6)

El vector $\overrightarrow{AB} = (3,2,6)$, el punt mitjà M es pot obtenir

$$M = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (1,0,2) + \frac{1}{2}(3,2,6) = \left(\frac{5}{2},1,5\right)$$



4 Dividiu el segment d'extrems A(1,2,3) i B(2,0,4) en tres parts iguals

Calculem el vector $\overrightarrow{AB} = (1,-2,1)$. El primer punt de divisió serà

$$M_1 = A + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = (1,2,3) + \frac{1}{3}(1,-2,1) = \left(\frac{4}{3},-\frac{4}{3},\frac{10}{3}\right)$$

el segon

$$M_2 = A + 2\cdot\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = (1,2,3) + 2\cdot\frac{1}{3}(1,-2,1) = \left(\frac{5}{3},-\frac{6}{3},\frac{11}{3}\right)$$

podem comprovar-ho fent

$$M_3 = A + 3\cdot\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = (1,2,3) + 3\cdot\frac{1}{3}(1,-2,1) = B$$

5 Comproveu si els punts A(0,1,3), B(2,4,8) i C(4,7,13) estan a la mateixa recta

El vector AC ha de ser proporcional a AB. Calculem els vectors
$\overrightarrow{AB} = (2,3,5)$ $\quad \overrightarrow{AC} = (4,6,10)$
aquests vectors són proporcionals
$k\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow k(2,3,5) = (4,6,10) \Rightarrow k = 2$
Aleshores els vectors estan alineats

6 Calcula les equacions de la recta definida pel punt A(1,2,-2) i el vector director $\vec{v} = (2,1,-3)$

Un punt (x,y,z) de la recta és de la forma
$(x, y, z) = (1,2,-2) + k(2,1,-3)$
d'on obtenim les equacions paramètriques

$$\begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 2 + k \\ z = -2 - 3k \end{cases}$$

aïllant k i igualant

$$\frac{x-1}{2} = y - 2 = \frac{z+2}{-3}$$

obtenim l'equació contínua
Si prenem dues d'aquestes equacions obtenim dos plans que defineixen la recta

$$\begin{cases} x - 1 = 2y - 4 \\ -3y + 6 = z + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ -3y - z + 4 = 0 \end{cases}$$

7 Calculeu la recta que passa pels punts A (1,2,4) i B(0,1,-2)

Prenem un dels punts, per exemple A, i el vector $\overrightarrow{AB}$ que serà el vector director de la recta. $\overrightarrow{AB} = (-1,-1,-6)$
Les equacions són

$$\begin{cases} x = 1 - k \\ y = 2 - k \\ z = 4 - 6k \end{cases}$$

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-4}{-6}$$

8 Donada la recta en forma paramètrica $\begin{cases} x = k \\ y = 3 + 2k \\ z = -1 - k \end{cases}$ **calculeu l'equació en forma contínua**

De l'equació sabem que el vector director de la recta són els coeficients del paràmetre k, en aquest cas $\vec{v} = (1,2,-1)$. A més a més un punt és, per exemple, quan k=0, el punt A(0,3,-1). L'equació contínua serà

$$\frac{x}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{-1}$$

9 Donada la recta $x=\frac{y+2}{3}=2z-1$**, calculeu el vector director i dos punts de la recta**

En primer lloc hem d'assegurar que l'equació de la recta sigui l'equació contínua. Hem de transformar-la en

$$x=\frac{y+2}{3}=2z-1 \Rightarrow x=\frac{y+2}{3}=\frac{z-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$$

on hem dividit per 2 la darrera igualtat. El vector director és $\vec{v}=\left(1,3,\frac{1}{2}\right)$, que podem transformar en $\vec{v}=(2,6,1)$ i un punt de la recta $A=\left(0,-2,\frac{1}{2}\right)$. Les equacions paramètriques són

$$\begin{cases} x=2k \\ y=-2+6k \\ z=\frac{1}{2}+k \end{cases}$$

diferents valors de k donen diferents punts de la recta, si k és 0 tenim el punt A, si k=1 obtenim un nou punt $B=\left(2,4,\frac{3}{2}\right)$

10 Calculeu si el punt A (2,3,4) pertany a la recta $x=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{3}$

Només cal veure si verifica l'equació de la recta. En aquest cas

$$2\neq\frac{3-1}{2}\neq\frac{4+1}{3}$$

no les verifica, el punt A no pertany a la recta

11 Trobeu un punt i el vector director de la recta

$$x=y+2=\frac{z-3}{2}$$

L'equació de la recta és l'equació contínua. Un punt per on passa la recta és $A=(0,-2,3)$ i el vector director $\vec{v}=(1,1,2)$

12 Trobeu un punt i el vector director de la recta d'equació

$$\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+y+z=1 \end{cases}$$

La recta ve donada com intersecció de dos plans. Podem resoldre aquest sistema en funció d'un paràmetre (per exemple z) i obtenir així dos punts de la recta. A partir d'aquests dos punts el vector director. Escrivim el sistema com

$$\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ 2x+y=1-z \end{cases}$$

Si restem les dues equacions obtenim

$x=1-z-3 \quad \Rightarrow x=-z-2$

i si substituïm a la primera equació

$y=3-x=3-(-z-2)=5+z$

Les solucions són

$$\begin{cases} x=-z-2 \\ y=z+5 \\ z=z \end{cases}$$

que és l'equació paramètrica de la recta. El vector director és

$\vec{v}=(-1,1,1)$

i un punt per on passa $A=(-2,5,0)$

Una segona manera de resoldre aquest exercici és calcular el vector director fent servir el producte vectorial dels dos vectors normals als dos plans

$\vec{u}=(1,1,0) \quad ; \vec{w}=(2,1,1)$

$$\vec{u}\times\vec{w}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix},-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right)=(1,-1,-1)$$

La solució és el mateix vector director anterior multiplicat per –1

Si volem calcular un punt podem fer que, per exemple, z=0

Obtenim

$$\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ 2x+y=1 \end{cases}$$

Si resolem aquest sistema obtenim x=-2 i y=5. Un punt de la recta és (-2,5,0)

13 Calculeu l'equació de la recta paral·lela a

$$\frac{x-1}{2}=y=\frac{z+1}{3}$$

que passi per A(2,3,1)

Conservem l'equació contínua de la recta i els denominadors, que són les components del vector director. Podem escriure

$$\frac{x-2}{2}=y-3=\frac{z-1}{3}$$

14 Calculeu si les rectes d'equacions $\frac{x-1}{2}=y=\frac{z+1}{3}$ **i** $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+y+z=1 \end{cases}$ **són perpendiculars**

Busquem els vectors directors de les rectes. De la primera recta el vector director és $\vec{v}=(2,1,3)$. De la segona recta resolem en sistema en funció del paràmetre z i obtenim

$$\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ 2x+y=1-z \end{cases}$$

de solució

$$\begin{cases} x=-z-2 \\ y=z+5 \\ z=z \end{cases}$$

i vector director $\vec{u}=(-1,1,1)$

El producte escalar dels dos vectors directors és

$\vec{v}\cdot\vec{u}=(2,1,3)\cdot(-1,1,1)=2\neq 0$

diferent de 0. Les rectes so són perpendiculars

15 Calculeu si les rectes d'equacions $\frac{x-1}{2}=y=\frac{z+1}{3}$ i $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+y+z=1 \end{cases}$ són paral·leles

Busquem els vectors directors de les rectes. De la primera recta el vector director és $\vec{v}=(2,1,3)$. De la segona recta resolem en sistema en funció del paràmetre z i obtenim

$$\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ 2x+y=1-z \end{cases}$$

de solució

$$\begin{cases} x=-z-2 \\ y=z+5 \\ z=z \end{cases}$$

i vector director $\vec{u}=(-1,1,1)$

Els dos vectors no són proporcionals

$$\frac{2}{-1}\neq\frac{1}{1}\neq\frac{3}{1}$$

aleshores les rectes no són paral·leles

16 Calculeu el punt de tall (si existeix) de les rectes $\frac{x-1}{2}=y=\frac{z+1}{3}$ i

$$\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+y+z=1 \end{cases}$$

Obtenim dues equacions de la primera de les rectes i formem el sistema de quatre equacions amb les dues de la segona recta

$$\begin{cases} x-1=2y \\ 3y=z+1 \\ x+y=3 \\ 2x+y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y=1 \\ 3y-z=1 \\ x+y=3 \\ 2x+y+z=1 \end{cases}$$

analitzem el sistema

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 3 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 3\\ 2 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 3 & -1 & 1\\ 0 & 3 & 0 & -2\\ 0 & 5 & 1 & -1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 3 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & -8 & 8\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 3 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 32\end{pmatrix}$$

El sistema es incompatible, no existeix un punt de tall. Les rectes s'encreuen

17 Comprova que les rectes

$r : x-1 = y = z-2$ $\qquad s : \begin{cases} x - z = 5 \\ y - z = 2 \end{cases}$

Són paral·leles i escriu l'equació del pla que les conté

El vector director de la primera és (1,1,1)
La segona recta en forma paramètrica

$$s : \begin{cases} x - z = 5 \\ y - z = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 5 + z \\ y = 2 + z \\ z = z \end{cases}$$

d'on veiem que el vector director és el mateix. Per calcular l'equació del pla ens cal un punt, per exemple el de la primera recta (1,0,2), el vector director (1,1,1) i un segon vector que formen d'un punt de cada recta, (1,0,2) de la primera i (5,2,0) de la segona

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 4 \\ y & 1 & 2 \\ z-2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow -2x + 3y - z = -4$$

18 Escriu l'equació de la recta que passa per l'origen de coordenades i és paral·lela a la recta $r : \begin{cases} 3x - 2y + 3z = 5 \\ 4x - y + z = 7 \end{cases}$

Trobem el vector director de la recta r resolen el sistema

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 & 5 \\ 4 & -1 & 1 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & -5 & 9 & -1 \end{pmatrix}$$

la segona fila dóna $-5y + 9z = -1 \quad \Rightarrow y = \dfrac{9z+1}{5}$

i a la primera equació

$$3x - 2\left(\frac{9z+1}{5}\right) + 3z = 5 \quad \Rightarrow \frac{15x - 18z - 2 + 15z}{5} = 5 \Rightarrow$$

$$15x - 3z - 2 = 25 \Rightarrow x = \frac{27+3z}{15}$$

Les solucions són

$$\begin{cases} x = \dfrac{27+3z}{15} \\ y = \dfrac{9z+1}{5} \\ z = z \end{cases}$$

i el vector director $\left(\frac{3}{15},\frac{9}{5},1\right) \approx (3,27,15) \approx (1,9,5)$

La recta que passa per l'origen i té aquest vector director és

$(x, y, z) = k(1,9,5) \qquad \frac{x}{1} = \frac{y}{9} = \frac{z}{5}$

Es pot obtenir el vector director a partir del producte vectorial dels dos vectors normals als plans

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow (1,9,5)$$

19 Considera la recta $r:\begin{cases} x = 3+\lambda \\ y = 4+\lambda \\ z = 6+\lambda \end{cases}$ **i la recta** $s: x-1 = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{2}$ **. Comprova que les dues rectes s'encreuen. Dóna les coordenades d'un punt P de r i un punt Q de s que verifiquin la condició que la recta PQ sigui la perpendicular comuna a r i s**

Formem el determinat dels vectors directors de cada recta (1,1,1) i (1,2,2), i el vector que uneix un punt de cada una

$\overrightarrow{PQ} = (2,3,5)$

El valors del determinant és diferent de zero, els vectors no estan en el mateix pla, les rectes es creuen

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$$

Considerem ara punts arbitraris de cada recta. De la primera els punts són de la forma

$(3+\lambda, 4+\lambda, 6+\lambda)$

i de la segona

$(1+k, 1+2k, 1+2k)$

El vector que uneix aquests dos punts arbitraris de cada una de les rectes és

$\overrightarrow{AB} = (-2+k-\lambda, -3+2k-\lambda, -5+2k-\lambda)$

i aquest vector, en el punt demanat, ha de ser perpendicular als dos vectors directors de les rectes

$(-2+k-\lambda, -3+2k-\lambda, -5+2k-\lambda)\cdot(1,1,1) = 0 \Rightarrow$

$-2+k-\lambda-3+2k-\lambda-5+2k-\lambda = 0 \Rightarrow 5k-3\lambda = 10$

$(-2+k-\lambda, -3+2k-\lambda, -5+2k-\lambda)\cdot(1,2,2) = 0 \Rightarrow$

$-2+k-\lambda+2(-3+2k-\lambda)+2(-5+2k-\lambda) = 0 \Rightarrow 9k-5\lambda = 18$

Les solucions del sistema

$\begin{cases} 5k-3\lambda = 10 \\ 9k-5\lambda = 18 \end{cases}$

son $k = 2$ i $\lambda = 0$

que donen els punts buscats de cada recta. Si $\lambda = 0$ el punt de la primera recta és (3,4,6) i si k=2 el punt de la segona és (3,5,5)

20 Estudieu la posició relativa de les rectes $r:\begin{cases} 2x+z=9 \\ y=1 \end{cases}$ **i** $s:\begin{cases} x+y=0 \\ -x+2y+z=5 \end{cases}$ **i calculeu l'equació del pla que conté s i és paral·lel a r**

Estudiem el sistema format per les quatre equacions de les dues rectes

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -9 \\ 0 & 4 & 3 & 19 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & -3 & -15 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}$$

El sistema és incompatible, les rectes s'encreuen. No tenen cap punt en comú

La recta s en forma paramètrica és

$$s:\begin{cases} x+y=0 \\ -x+2y+z=5 \end{cases} \to \begin{cases} x+y=0 \\ -x+2y=5-z \end{cases}$$

en funció de z obtenim de solucions

$$x=\frac{z-5}{3} \quad y=\frac{5-z}{3} \quad z=z$$

Un punt de la recta és quan z=0 $A=\left(-\frac{5}{3},\frac{5}{3},0\right)$ i el vector director els coeficients de z

$$\vec{v}=\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},1\right)\approx(1,-1,3)$$

el vector director de r el podem obtenir a partir del producte vectorial

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \to (-1,0,2)$$

Podem escriure l'equació del pla demanat com

$$(x,y,z)=\left(-\frac{5}{3},\frac{5}{3},0\right)+k(1,-1,3)+m(-1,0,2)$$

o desenvolupant el determinat

$$\begin{vmatrix} x+\frac{5}{3} & 1 & -1 \\ y-\frac{5}{3} & -1 & 0 \\ z & 3 & 2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow -2\left(x+\frac{5}{3}\right)-3\left(y-\frac{5}{3}\right)-z-2\left(y-\frac{5}{3}\right)=0$$

que transformem en

$$-2x-\frac{10}{3}-5y+\frac{25}{3}-z=0 \Rightarrow$$

$$-2x-5y-z+5=0$$

21 Considera la recta $r:\begin{cases} x-y-3z=1 \\ x-3y+z=5 \end{cases}$**. Digues si el punt P(6,2,2) es troba a la recta paral·lela a r que passa per l'origen de coordenades**

Calculem el vector director de la recta r

$$r:\begin{cases} x-y-3z=1 \\ x-3y+z=5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-1+5z \\ y=-2+2z \\ z=z \end{cases} \rightarrow v=(5,2,1)$$

La recta paral·lela a r que passa per l'origen és

$$\begin{cases} x=5k \\ y=2k \\ z=k \end{cases}$$

el punt (6,2,2) no verifica aquestes equacions

22 Escriu les equacions contínues de la recta que passa pel punt P(2,-3,5) i té la mateixa direcció que la recta

$$r:\begin{cases} x-y+2z+4=0 \\ 2x+3y+6z=12 \end{cases}$$

Resolem el sistema format pels dos plans. És un sistema compatible determinat amb un grau de llibertat

$$r:\begin{cases} x-y+2z+4=0 \\ 2x+3y+6z=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=-2z-4 \\ 2x+3y=12-6z \end{cases}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -2z-4 & -1 \\ 12-6z & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}=\frac{-6z-12+12-6z}{5}=-\frac{12z}{5}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -2z-4 \\ 2 & 12-6z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}=\frac{12-6z+4z+8}{5}=\frac{-2z+20}{5}$$

El vector director són els coeficients del paràmetre z $\left(-\frac{12}{5},-\frac{2}{5},1\right)$, que podem multiplicar per 5 i obtenim (-12,-2,5)

L'equació de la recta

$$\frac{x-2}{-12}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-5}{5}$$

També podem obtenir el vector director fent el producte vectorial dels dos vectors normals als dos plans

$$(1,-1,2)\times(2,3,6)\rightarrow\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix}\rightarrow(-12,-2,5)$$

23 Calcula l'equació del pla que conté els punts A(1,0,1), B(2,2,4) i C(1,1,0)

Fixem un punt, per exemple A, i calculem els vectors
$\overrightarrow{AB} = (1,2,3)$
$\overrightarrow{AC} = (0,1,-1)$
Aquests dos vectors són els vectors directors del pla i el punt A és un punt del pla.
L'equació la dóna el determinant

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ y & 2 & 1 \\ z-1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2(x-1)+(z-1)-3(x-1)+y=0 \Rightarrow$$

$$-2x+2+z-1-3x+3+y=0 \Rightarrow$$

$$-5x+y+z+4=0$$

24 Calcula l'equació del pla que passa pel punt (2,3,1) i té de vectors director v=(1,0,0) i w=(2,-1,1)
Calculem el determinant

$$\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 2 \\ y-3 & 0 & -1 \\ z-1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

si desenvolupem obtenim
$-z+1-y+3=0 \Rightarrow y+z=4$
Podem també considerar l'equació del pla de la forma
$(x,y,z)=(2,3,1)+k(1,0,0)+m(2,-1,1)$
d'on obtenim

$$\begin{cases} x = 2+k+2m \\ y = 3-m \\ z = 1+m \end{cases}$$

en aquest sistema eliminem els paràmetres m i k. Només cal eliminar m de la segona i tercera equació
$3-y=z-1 \Rightarrow y+z=4$
Una tercera manera és calcular el vector associat al pla a partir del producte vectorial dels dos vectors directors

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \to (0,-1,-1)$$

l'equació és de la forma
$-y-z=D$
i calculem D fent que contingui el punt (2,3,1)
$-y-z=D \Rightarrow D=-4 \to y+z=4$

25 Calcula l'equació del pla perpendicular al segment que uneix els punts A(2,-1,3) i B(-4,2,2) i que passa pel seu punt mitjà
El vector que uneix els dos punts és
$\overrightarrow{AB} = (-6,3,-1)$
i aquest vector dóna el vector associat del pla. L'equació del pla demanat és de la forma
$-6x+3y-z=D$

el punt mitjà del segment és

$$M = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (2,-1,3) + \frac{1}{2}(-6,3,1) = \left(-1, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

si el pla ha de contenir aquest punt podem calcular D

$$-6(-1) + 3\frac{1}{2} - \frac{5}{2} = 5$$

i l'equació del pla és

$$-6x + 3y - z = 5$$

26 Demostra que el pla d'equació $Ax + By = 0$ conté l'eix OZ

Els punts de l'eix OZ són de la forma (0,0,z) on z és un real. Aquests punts verifiquen l'equació donada

27 Escriu l'equació canònica i general del pla que conté els punts P(-3,00), Q(0,4,0) i R(0,0,-5). Indica'n dos vectors orientadors

Fixem un punt, per exemple P, i formem dos vectors PQ=(3,4,0) i PR(3,0,-5). L'equació general del pla és el desenvolupament del determinant

$$\begin{vmatrix} x+3 & 3 & 3 \\ y & 4 & 0 \\ z & 0 & -5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -20(x+3) - 12z + 15y = 0$$

que simplifiquem a

$$20x - 15y + 12z = -60$$

L'equació canònica la formen els talls amb els eixos. Dels punts inicials P, Q i R obtenim

$$\frac{x}{-3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{-5} = 1$$

28 Donades les equacions $\begin{cases} x = 3 + 3\lambda - 3\mu \\ y = 3\lambda + 2\mu \\ z = -2\mu \end{cases}$ **comprova que es tracta d'un pla i troba'n els punts de tall amb els eixos de coordenades**

De l'equació obtenim que el pla conté el punt A(3,0,0) i els vectors directors, que són els coeficients dels paràmetres, són (3,3,0) i (-3,2,-2). Aquests vectors són linealment independents i formen un pla

L'equació general del pla l'obtenim desenvolupant el determinant

$$\begin{vmatrix} x-3 & 3 & -3 \\ y & 3 & 2 \\ z & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x - 2y - 5z = 6$$

Els punts de tall amb els eixos els podem obtenir de l'equació anterior si fem que dues de les tres variables siguin zero.

El tall amb l'eix OX és quan $y = z = 0$, que dóna $x = 3$. Aquest punt (3,0,0) ja el coneixíem

El tall amb l'eix OY és quan $x = z = 0$, de solució $y = -3$, és el punt (0,-3,0)
El tall amb l'eix OZ serà $z = \frac{6}{5}$, i és el punt $\left(0,0,\frac{6}{5}\right)$

Determina els valors de a que fan que els dos plans d'equacions $ax + y + z - 3 = 0$ i $(a+2)x + ay + az = 5$ siguin paral·lels

Els coeficients dels plans han de ser proporcionals
$\frac{a}{a+2} = \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \quad \Rightarrow a^2 = a + 2$
Les solucions d'aquesta equació són $a = 2$ i $a = -1$

29 Donada l'equació del pla $\begin{cases} x = 1 + k - 2m \\ y = 2k + m \\ z = 3 + m \end{cases}$ **troba'n un punt i els dos vectors directors. Calcula la seva equació general**
De l'equació obtenim directament un punt, que són els termes independents, i els vectors, que són els coeficients dels paràmetres
Punt A(1,0,3), vectors v=(1,2,0) i w=(-2,1,1)
L'equació general la podem obtenir de diferents maneres, desenvolupant el determinant

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & -2 \\ y & 2 & 1 \\ z-3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$2(x-1) + (z-3) + 4(z-3) - y = 0 \Rightarrow$

$2x - 2 + z - 3 + 4z - 12 - y = 0 \Rightarrow$

$2x - y + 5z = 17$

Podem calcular el vector associat al pla fent el producte vectorial dels dos vectors directors

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow (2,-1,5)$$

l'equació del pla és de la forma $2x - y + 5z = D$
si demanem que passi per A(1,0,3) calculem D
2+15=D=17
l'equació és
$2x - y + 5z = 17$

30 Troba l'equació canònica del pla que passa pel punt P(-3,1,4) i és perpendicular als plans $2x - 5y + 3z + 5 = 0$ **i** $7x - y + 3z = 21$

Si el pla ha de ser perpendicular als dos plans donats, els seus vectors directors han de ser els vectors normals dels plans (2,-5,3) i (7,-1,3). Podem formar

$$\begin{vmatrix} x+3 & 2 & 7 \\ y-1 & -5 & -1 \\ z-4 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4x-5y-11z=-61$$

D’aquesta equació general podem fer la canònica calculant els talls del pla amb els eixos. Són els punts

$$\left(-\frac{61}{4},0,0\right);\left(0,\frac{61}{5},0\right);\left(0,0,\frac{61}{11}\right)$$

d’on l’equació canònica és

$$\frac{x}{-\frac{61}{4}}+\frac{y}{\frac{61}{5}}+\frac{z}{\frac{61}{11}}=1$$

31 Troba l’equació general del pla que passa pel punt P(-4,-2,3) i conté la recta d’equació $(x,y,z)=(1,-2,-2)+\lambda(2,1,2)$

Un dels vectors directors del pla és el vector director de la recta (2,1,2). El segon vector director el podem obtenir prenent com origen el punt P(-4,-2,3) i com final un punt de la recta (1,-2,-2). Aquest segon vector és (5,0,-5), o millor (1,0,-1). L’equació del pla és el desenvolupament del determinant

$$\begin{vmatrix} x+4 & 2 & 1 \\ y+2 & 1 & 0 \\ z-3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow -(x+4)+2(y+2)-(z-3)+2(y+2)=0$$

d’on obtenim

$$-x+4y-z+7=0$$

32 Troba l’equació general del pla que conté la recta $\begin{cases} 2x+y-3z=6 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$ **considerant que un dels vectors que determina l’orientació del pla és un vector director de la recta** $x=\frac{2y}{-3}=2(z+1)$

L’equació de la recta, escrita en forma contínua, dóna el vector director

$$x=\frac{2y}{-3}=2(z+1)\Rightarrow \quad x=\frac{y}{-\frac{3}{2}}=\frac{z+1}{\frac{1}{2}}$$

El vector director és $\left(1,-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)\rightarrow(2,-3,1)$

De l’equació de la recta hem d’obtenir un punt i el seu vector director. Si resolem el sistema d’equacions en funció de z com grau de llibertat obtenim

$$\begin{cases} 2x+y-3z=6 \\ x-2y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y=6+3z \\ x-2y=-z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\frac{12+5z}{5} \\ y=\frac{6+5z}{5} \\ z=z \end{cases}$$

el punt és $\left(\frac{12}{5},\frac{6}{5},0\right)$ i el vector director (1,1,1). L'equació del pla

$$\begin{vmatrix} x-\frac{12}{5} & 2 & 1 \\ y-\frac{6}{5} & -3 & 1 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Si desenvolupem el determinant obtenim

$$20x+5y-25z=54$$

33 Calcula la distància entre els punts A(1,2,-3) i B(0,3,5)

Hem de calcular el mòdul del vector $\overrightarrow{AB}$. Calculem les components fent final menys origen

$$\overrightarrow{AB}=(-1,1,8)$$

i el seu mòdul és

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(-1)^2+1^2+8^2}=\sqrt{66}$$

34 Calcula la coordenada z del punt A(2,3,z) de manera que la distància al punt B(1,1,2) sigui 3

El vector que uneix els dos punts és

$$\overrightarrow{AB}=(-1,-2,2-z)$$

el mòdul ha de ser el que es demana. Podem plantejar

$$3=\sqrt{1+4+(2-z)^2}\Rightarrow$$

$$9=1+4+4-2z+z^2\Rightarrow$$

$$0=z^2-2z$$

Les solucions d'aquesta equació són $z=0$ i $z=2$

35 Troba un vector paral·lel a (2,3,1) de mòdul 2

Un vector paral·lel al vector donat és de la forma $k(2,3,1)$ que té de mòdul

$$\left|k(2,3,1)\right|=k\sqrt{4+9+1}=k\sqrt{14}$$

si el mòdul ha de ser 2, el valor de k serà

$$k\sqrt{14}=2\Rightarrow k=\frac{2}{\sqrt{14}}=\frac{2\sqrt{14}}{14}=\frac{\sqrt{14}}{7}$$

que podem considerar de signe positiu o negatiu, els dos vectors demanats són

$$\pm\frac{\sqrt{14}}{7}(2,3,1)$$

36 Determina els vectors de mòdul 2 que són alhora perpendiculars als vectors (2,-2,3) i (3,-3,2)

Sigui el vector $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$

Ha de ser perpendiculars als dos vectors donats

$$(v_1,v_2,v_3)\cdot(2,-2,3)=2v_1-2v_2+3v_3=0$$

$(v_1, v_2, v_3)\cdot(3,-3,2) = 3v_1 - 3v_2 + 2v_3 = 0$
a més a més el seu mòdul és 2
$v_1^{\ 2} + v_2^{\ 2} + v_3^{\ 2} = 4$
Les equacions tenen de solució $v_1 = v_2 = \pm\sqrt{2};\quad v_3 = 0$
Els dos possibles vectors són $(\sqrt{2},\sqrt{2},0)$ i $(-\sqrt{2},-\sqrt{2},0)$

37 Calcula la distància del punt P(3,-5,6) a) A l'origen de coordenades. B) A cadascun del plans XY, XZ i YZ c) A cadascun del tres eixos d'ordenades

La distància a l'origen és el mòdul del vector $\overrightarrow{OP} = (3,-5,6)$
$\left|\overrightarrow{OP}\right| = \sqrt{9+25+36} = \sqrt{70}$
La distància al pla XY és 6, al pla XZ és 5 i al pla YZ és 3
La distància al eix OX és $\sqrt{y^2 + z^2} = \sqrt{25+36} = \sqrt{61}$
Al eix OY és $\sqrt{x^2 + z^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$
Al eix OZ és $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$

38 Determina l'equació dels plans del vector associat $\vec{n} = (1,2,-3)$ i que disten 3 unitats de l'origen de coordenades

Els plans són de la forma $x + 2y - 3z = D$. Si la distància a l'origen ha de ser de 3 unitats ha de ser
$\frac{|D|}{\sqrt{14}} = 3 \Rightarrow D = \pm 3\sqrt{14}$
i els dos plans tenen d'equació
$x + 2y - 3z = 3\sqrt{14}$ i $x + 2y - 3z = -3\sqrt{14}$

39 Donats els vectors $\vec{u} = (3,-2,4)$ i $\vec{v} = (1,4,-2)$, troba A) El seu producte vectorial. B) Un vector unitari perpendicular als dos vectors

El producte vectorial és
$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} \rightarrow (-12,10,14)$$
El vector trobat, el producte vectorial, és perpendicular a tots dos vectors. Si dividim pel seu mòdul tindrem un vector unitari
$|(-12,10.14)| = \sqrt{440}$
Els vectors perpendiculars unitaris són
$$\pm\frac{1}{\sqrt{440}}(-12,10,14)$$

40 Troba la distància del punt (3,4,5) a la recta d'equació $\frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+5}{-1}$

Podem aplicar

$$d(P,r)=\frac{\left|\vec{u}\times\overrightarrow{QP}\right|}{\left|\vec{u}\right|}$$

el vector $\vec{u}=(1,2,-1)$ és el vector director de la recta, els punts P(3,4,5) i Q(-1,-2,-5)

El vector $\overrightarrow{QP}=(4,6,10)$ i el producte vectorial

$$\vec{u}\times\overrightarrow{QP}\rightarrow\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 6 & 10 \end{vmatrix}\rightarrow(26,-14,-2)$$

Si ara dividim els mòduls dels dos vectors

$$d(P,r)=\frac{\left|\vec{u}\times\overrightarrow{QP}\right|}{\left|\vec{u}\right|}=\frac{\left|(26,-14,-2)\right|}{\left|(1,2,-1)\right|}=\frac{\sqrt{876}}{\sqrt{6}}=\sqrt{146}$$

Una segona manera de fer aquest exercici és calcular el punt de la recta més proper al punt (3,4,5). Per això resolem el sistema format per la recta donada i el pla perpendicular a la recta que passa per (3,4,5). Aquest pla és de la forma

$$x+2y-z=D$$

i si ha de passar per (3,4,5) podem calcular D

$$3+2\cdot4-5=6=D$$

resolem el sistema

$$\begin{cases} x+1=-z-5 \\ 2x+2=y+2 \\ x+2y-z=6 \end{cases}\rightarrow\begin{cases} x+z=-6 \\ 2x-y=0 \\ x+2y-z=6 \end{cases}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -6 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}\rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & -12 \\ 0 & -2 & 2 & -12 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & -12 \\ 0 & 0 & 6 & -36 \end{pmatrix}$$

Les solucions són (0,0,-6). La distància entre aquest punt i (3,4,5) és

$$\left|(3,4,11)\right|=\sqrt{146}$$