Funcions. Límits. Continuïtat. Derivades

Demostreu que la successió de terme general $a_n = \dfrac{n}{2n+1}$ **és creixent. Calculeu el límit**

El terme $a_{n+1} = \dfrac{n+1}{2(n+1)+1} = \dfrac{n+1}{2n+3}$, si el comparem amb el terme anterior

$$a_n < a_{n+1} \Rightarrow \frac{n}{2n+1} < \frac{n+1}{2n+3} \Rightarrow n(2n+3) < (2n+1)(n+1)$$

si calculem els productes

$$2n^2 + 3n < 2n^2 + 3n + 1 \Rightarrow 0 < 1$$

El límit és

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n}}{\frac{2n}{n} - \frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$$

Donada la successió $a_n = \dfrac{n^2+n}{2n+2}$ **calculeu el valor de n que fa que** $a_n = 5$

Fem que

$$a_n = \frac{n^2+n}{2n+2} = 5 \quad \Rightarrow n^2 + n = 10n + 10 \Rightarrow \quad n^2 - 9n - 10 = 0$$

Les solucions de l'equació són n=10 i n=-1. És el terme desè de la successió

Calculeu els límits $\lim \dfrac{n}{\sqrt{5n+1}}$ **;** $\lim \dfrac{3-n^2}{2n^2+n}$ **;** $\lim \left(n - \dfrac{n^2+n}{n+1} \right)$

$$\lim \frac{n}{\sqrt{5n+1}} = \lim \frac{\frac{n}{n}}{\sqrt{\frac{5n}{n^2} + \frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{0\downarrow}} = \infty$$

$$\lim \frac{3-n^2}{2n^2+n} = \lim \frac{\frac{3}{n^2} - \frac{n^2}{n^2}}{\frac{2n^2}{n^2} + \frac{n}{n^2}} = \lim \frac{\frac{3}{n^2} - 1}{2 + \frac{1}{n}} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim \left(n - \frac{n^2+n}{n+1} \right) = \lim \frac{n^2 + n - n^2 - n}{n+1} = \lim \frac{0}{n+1} = 0$$

D'una manera més simple, aquest últim límit es calcula operant

$$\left(n - \frac{n^2+n}{n+1} \right) = \left(n - \frac{n(n+1)}{n+1} \right) = n - n = 0$$

Calculeu els límits $\lim \sqrt{n+2} - n$ **;** $\lim \left(\dfrac{2n^2-1}{2} - n^2 \right)$

és del tipus $\infty - \infty$. Multipliquem i dividim pel terme conjugat

$$\lim\ \sqrt{n+2}-n=\lim\left(\sqrt{n+2}-n\right)\frac{\left(\sqrt{n+2}+n\right)}{\left(\sqrt{n+2}+n\right)}=\lim\frac{n-2-n^2}{\sqrt{n+2}-n}=-\infty$$

$$\lim\ \left(\frac{2n^2-1}{2}-n^2\right)=\lim\left(\frac{2n^2-1-2n^2}{2}\right)=\lim\ \frac{-1}{2}=-\frac{1}{2}$$

Calculeu els límits $\lim\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$ **;** $\lim\ \left(\frac{n+2}{n}\right)^{n}$

Els dos són límits que presenten l'aspecte 1^{∞}

$$\lim\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}=\lim\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{2}=e^{2}$$

$$\lim\ \left(\frac{n+2}{n}\right)^{n}=\lim\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n}=\left[n=2t\right]=\lim\left(1+\frac{2}{2t}\right)^{2t}=\lim\left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right)^{2}=e^{2}$$

Calculeu els límits $\lim\ \left(1-\frac{1}{2n}\right)^{3n}$ **;** $\lim\ \left(\frac{n-3}{n}\right)^{n}$

$$\lim\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{3n}=\left[-2n=t\right]=\lim\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-\frac{3t}{2}}=\lim\left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right)^{-\frac{3}{2}}=e^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e^{3}}}$$

$$\lim\ \left(\frac{n-3}{n}\right)^{n}=\lim\left(1+\frac{-3}{n}\right)^{n}=\left[n=-3t\right]=\lim\left(1+\frac{-3}{-3t}\right)^{-3t}=\lim\ \left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right)^{-3}=e^{-3}=\frac{1}{e^{3}}$$

Donada la funció $f(x)=x^2-4x+1$ **comproveu si existeix algun valor en [0,1] que tingui com imatge 0**

F(x) és una funció contínua que verifica f(0)=1 i f(1)=-2. Hi ha un canvi de signe i segons el teorema de Bolzano existeix algun valor c en 0<c<1 tal que f(c)=0

Una funció es defineix

$$f(x)=\begin{cases}3-ax^2 & x\le 0\\ \dfrac{2}{ax} & x>0\end{cases}$$

calculeu el valor del paràmetre a que fa que la funció sigui contínua

Calculem els límits laterals en el punt 0

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} 3-ax^2=3$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} \frac{2}{ax}=\infty$$

Aleshores no hi ha cap valor de a que faci que la funció sigui contínua en x=0

Donada la funció

$$f(x)=\begin{cases}ax^2 & x\le 1\\ x+a & x>1\end{cases}$$

estudieu la continuïtat i derivabilitat en el punt x=1

Calculem els límits laterals en el punt x=1

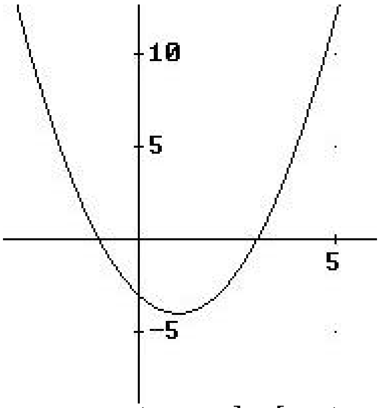
$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} ax^2=a$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} x+a=a+1$$

L'equació $a=a+1$ no té solució. La funció no és contínua en x=1 . aleshores tampoc és derivable

Calculeu el domini de la funció $f(x)=\sqrt{x^2-2x-3}$

La funció té imatges quan $x^2-2x-3\geq 0$. La funció $g(x)=x^2-2x-3$ és una paràbola que talla l'eix en els punts x= -1 y x=3 i té imatges negatives en l'interval (-1,3). El domini de la funció f(x) són tots els reals excepte aquest interval



$D\ f(x)=(-\infty,-1]\cup[3,\infty)$

Calculeu els valors de a i b en la funció

$$f(x)=\begin{cases} ax^2 & x\leq 0 \\ x+b & x>0 \end{cases}$$

que fan que f(x) sigui contínua i derivable

Si la funció ha de ser contínua en x=0

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} ax^2 = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x+b=b$$

d'on b=0. La derivada de la funció és

$$f'(x)=\begin{cases} 2ax & x\leq 0 \\ 1 & x>0 \end{cases}$$

Només cal calcular el límit

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x)=\lim_{x\to 0^-} 2ax=0$$

El valor del límit és zero i no pot ser mai igual a 1. Aleshores la funció pot ser contínua si b=0 però no pot ser derivable en 0 en cap cas

Calculeu les derivades de les funcions

$$y=3x^2\sin\frac{x}{2} \qquad y=\sqrt{(2x-1)^3} \qquad y=\frac{2x+1}{x}$$

$$y'=6x\sin\frac{x}{2}+\frac{1}{2}3x^2\cos\frac{x}{2}$$

$$y=(2x-1)^{\frac{3}{2}} \qquad y'=\frac{3}{2}(2x-1)^{\frac{1}{2}}\cdot 2=3\sqrt{2x-1}$$

$$y'=\frac{2x-(2x+1)}{x^2}=-\frac{1}{x^2}$$

La última de les funcions pot derivar-se més fàcilment fent unes transformacions inicials

$$y=\frac{2x+1}{x}=2+\frac{1}{x}$$

La derivada de 2 és zero, només cal derivar $\frac{1}{x}=x^{-1}$

Feu servir derivació logarítmica i calculeu la derivada de $y=(\sin\ x)^x$

$$\ln y = \ln\left((\sin x)^x\right)$$
$$\ln y = x \ln \sin x$$
$$\frac{1}{y} y' = \ln \sin x + x \frac{1}{\sin x} \cos x$$
$$y' = (\sin x)^x \left[\ln \sin x + x \frac{\cos x}{\sin x} \right]$$

Calculeu l'equació de la recta tangent en x=2 de la funció $y = \dfrac{2x+1}{x}$

La imatge de 2 en la funció és $f(2) = \dfrac{5}{2}$, la recta tangent passa per (2,5/2)

La derivada de la funció, calculada en un exercici anterior, és $y' = \dfrac{2x - (2x+1)}{x^2} = -\dfrac{1}{x^2}$, el valor de la derivada en x=2 és $y'(x=2) = -\dfrac{1}{4}$

La recta que cerquem té pendent -1/4 i passa per (2,5/2), Podem escriure

$$y = -\frac{1}{4}x + b \;; \quad \frac{5}{2} = -\frac{1}{4}2 + b \quad \Rightarrow \quad b = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3$$

l'equació de la recta és $y = -\dfrac{1}{4}x + 3$

Busqueu el punt de la funció anterior que té una recta tangent paral· lela a y=x

La recta donada té pendent 1. La derivada de la funció anterior és $y' = \dfrac{2x - (2x+1)}{x^2} = -\dfrac{1}{x^2}$, que dóna imatges sempre negatives. No existeix cap punt on la recta tangent sigui paral· lela a y=x

16. Fent servir la regla de l'Hôpital, calculeu els límits quan $x \to 0$

$$\lim \frac{\tan x}{2x} \qquad \lim\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right) \qquad \lim \frac{\sin 6x}{\sin 2x}$$

$$\lim \frac{\tan x}{2x} = \lim \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{2} = \lim \frac{1}{2\cos^2 x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right) = \lim\left(\frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)}\right) = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim \frac{e^x - 1}{e^x - 1 + xe^x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim \frac{e^x}{e^x + e^x + xe^x} =$$
$$= \lim \frac{e^x}{e^x(2+x)} = \lim \frac{1}{2+x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim \frac{\sin 6x}{\sin 2x} = \lim \frac{6\cos 6x}{2\cos 2x} = \frac{6}{2} = 3$$