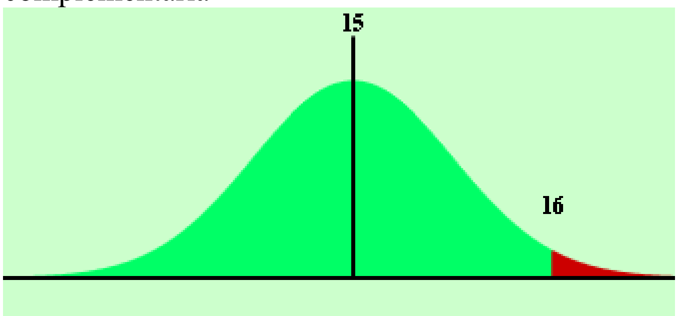
1. **La durada mitjana d'un rentavaixelles és de 15 anys amb una desviació típica igual a 0,5 anys. Si la vida útil de l'electrodomèstic es distribueix normalment, calcula la probabilitat que el rentavaixelles duri més de 16 anys**

Calculem el valor tipificat z que correspon a x=16

$$Z = \frac{x-\bar{x}}{\sigma} = \frac{16-15}{0,5} = 2$$

i llegim el valor que correspon en una taula N(0,1) és 0,97725. Volem la complementària



$$P(x \geq 16) = 0,02275$$

2. **En una regió determinada hi ha una mitjana de precipitacions de 2000 mm amb una desviació típica de 300 mm. Suposant que es tracta d'una distribució normal, calcula la probabilitat que en un any concret la pluja no superi els 1200 mm**

El valor tipificat és

$$Z = \frac{x-\bar{x}}{\sigma} = \frac{1200-2000}{300} = -2,66$$

i la probabilitat que dona una N(0,1) és $1 - Z(2,66) = 1 - 0,99621 = 0,00319$

La probabilitat és de l'ordre del 0,4%

3. **Les talles de 800 nadons es distribueixen normalment amb una mitjana de 66 cm i una desviació típica de 5 cm. Calcula quants nadons s'espera que tinguin talles entre 65 i 70 cm**

Tipifiquem els dos valors en N(66,5)

$$Z = \frac{x-\bar{x}}{\sigma} = \frac{65-66}{5} = -0,2$$

$$Z = \frac{x-\bar{x}}{\sigma} = \frac{70-66}{5} = 0,8$$

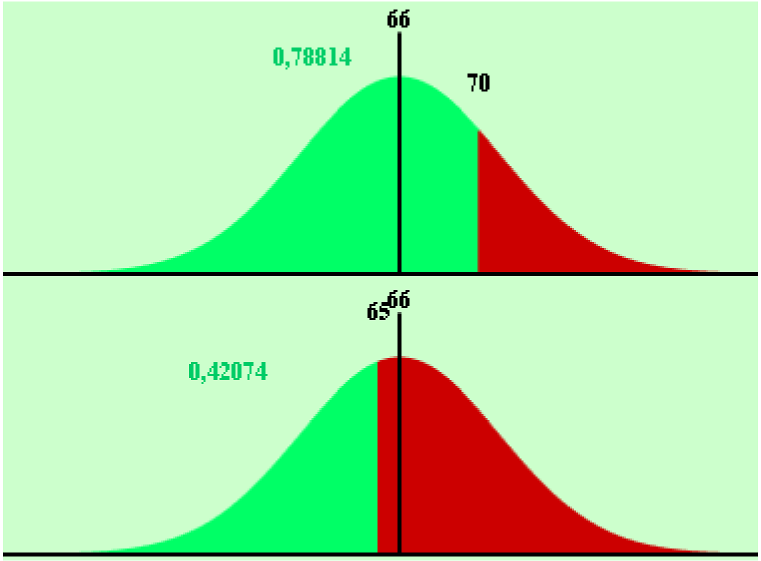
Les corresponents probabilitats són les que dóna una taula N(0,1) on hem d'observar que el primer valor és inferior a la mitjana

$$P(x < 65) = Z(-0,2) = 1 - 0,57926 = 0,42074$$

$$P(x < 70) = Z(0,8) = 0,78814$$

Aleshores la probabilitat demanada és

$$P(65 < x \leq 70) = 0,78814 - 0,42074 = 0,3674$$



Dels 800 nadons n'esperem tinguin talles entre 65 i 70
$800 \cdot 0{,}3674 = 293{,}92 \approx 294$

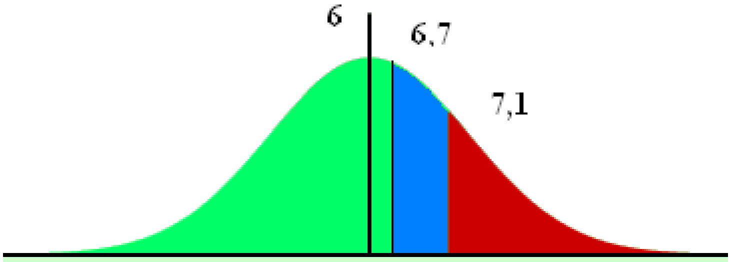
4. **En un examen fet a un gran nombre d'estudiants s'ha comprovat que les qualificacions obtingudes corresponen raonablement a una distribució normal amb qualificació mitjana de 6 i desviació típica de 1. Si s'agafa a l'atzar un alumne, quina és la probabilitat que la seva qualificació estigui compresa entre 6,7 i 7,1?**

Tipifiquem els valors 6,7 i 7,1 sobre una normal N(6,1)

$Z = \frac{x - \bar{x}}{\sigma} = \frac{6{,}7 - 6}{1} = 0{,}7 \quad Z = \frac{x - \bar{x}}{\sigma} = \frac{7{,}1 - 6}{1} = 1{,}1$

Els valors que dóna una taula N(0,1) són 0,86433 i 0,75804. La probabilitat demanada és

$P(6{,}7 < x < 7{,}1) = 0{,}86433 - 0{,}75804 = 0{,}10629$



5. **Les vendes diàries d'uns grans magatzems tenen una distribució normal amb una mitjana de 35560 € i una desviació típica de 2530 €. Justifica si és o no raonable obtenir en un dia unes vendes superiors a 55000 €. Calcula quants dies en un any s'espera obtenir unes vendes superiors a 40620 €**

La probabilitat que les vendes siguin superiors a 55000 és pràcticament zero, ja que el valor tipificat és

$$Z(55000) = \frac{55000 - 35560}{2530} = 7{,}68$$

La probabilitat que les vendes superin 40620 és

$$Z(40620) = \frac{40620 - 35560}{2530} = 2$$

$P(x > 40620) = 1 - 0{,}97725 = 0{,}02275$

que és una probabilitat petita, però no nul·la. Si pensem que els grans magatzems estan oberts 300 dies a l'any, els que s'esperen vendes que superin aquesta xifra seran:

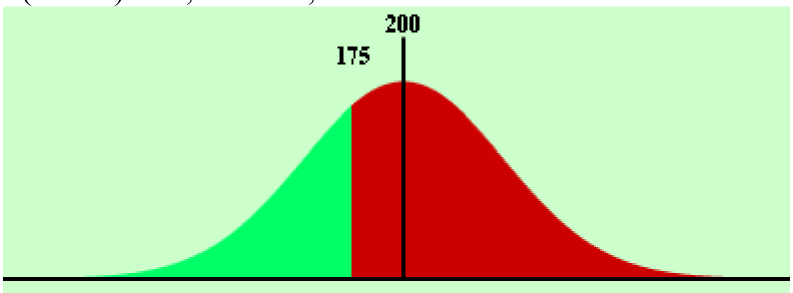
$300 \cdot 0{,}02275 = 8{,}325 \approx 8$ dies

6. El pes de les truites d'una piscifactoria segueixen una llei N(200,50). Si n'agafem una a l'atzar, calcula quines són les probabilitats que a) no pesi més de 175 gr. b) pesi més de 230 gr. c) el seu pes estigui comprès entre 225 i 270 gr.

La probabilitat que no pesi més de 175

$$Z(175) = \frac{x-\bar{x}}{\sigma} = \frac{175-200}{50} = -0{,}5$$

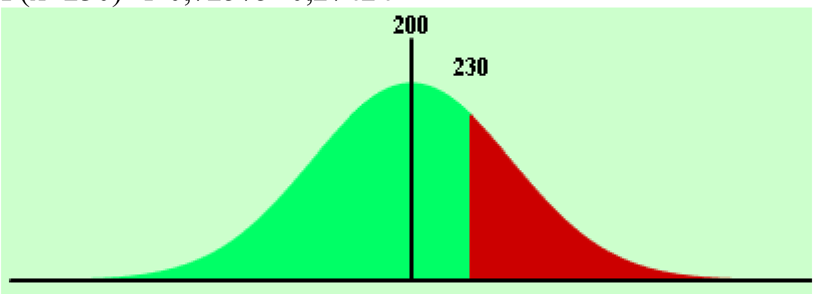
El valor tipificat és 0,69146 per a z=0,5. Aleshores la probabilitat demanada és P(x<175)=1-0,69146=0,30854



$$Z(230) = \frac{x-\bar{x}}{\sigma} = \frac{230-200}{50} = 0{,}6$$

La probabilitat que pesi més de 230 és

P(x>230)=1-0,72575=0,27424



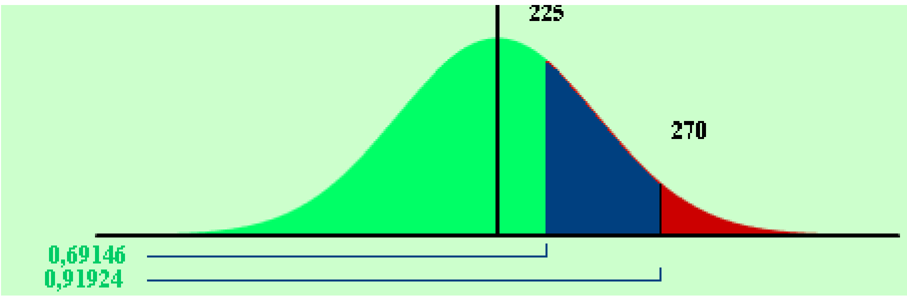
Un valor comprès entre 225 i 270 és aquell de valors tipificats

$$Z(225) = \frac{x-\bar{x}}{\sigma} = \frac{225-200}{50} = 0{,}5$$

$$Z(270) = \frac{x-\bar{x}}{\sigma} = \frac{270-200}{50} = 1{,}4$$

La probabilitat és

$$P(225 < x < 270) = 0{,}91924 - 0{,}69146 = 0{,}22778$$



7. **El pes dels toros d'una granja determinada es distribueix amb una distribució normal de 500 kg de mitjana i 45 kg de desviació típica. Si la granja té 2000 toros calcula quants pesaran més de 540. Quants pesaran menys de 480. Quants pesaran entre 490 i 510 kg**.

$$Z(540) = \frac{x - \bar{x}}{\sigma} = \frac{540 - 500}{45} = 0{,}88$$

$$P(x > 540) = 1 - 0{,}81057 = 0{,}18943 \quad N = 2000 \cdot 0{,}18943 \approx 379$$

$$Z(480) = \frac{x - \bar{x}}{\sigma} = \frac{480 - 500}{45} = 0{,}44$$

$$P(x < 480) = 1 - 0{,}67003 = 0{,}32997 \quad N = 2000 \cdot 0{,}32997 \approx 660$$

$$Z(510) = \frac{x - \bar{x}}{\sigma} = \frac{510 - 500}{45} = 0{,}22 \quad Z(490) = \frac{x - \bar{x}}{\sigma} = \frac{490 - 500}{45} = -0{,}22$$

$$P(490 < x < 510) = 0{,}58706 - (1 - 0{,}58706) = 0{,}17412$$

$$N = 2000 \cdot 0{,}17412 \approx 348$$

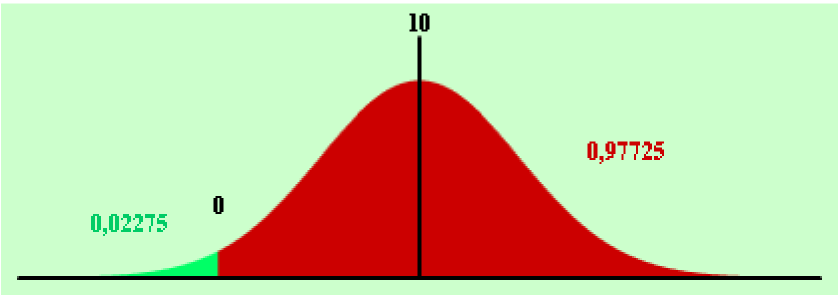
8. **Si la companyia aèria Avió sap que el temps de retard dels seus vols segueix una llei normal amb un retard mitjà de 10 minuts i una desviació de 5 minuts, calcula les probabilitats que un vol no tingui retard, que el proper vol no arribi amb més de 10 minuts de retard i que el proper vol no arribi amb més de 20 minuts de retard.**

El valor x=0 correspon a un vol que no tingui retard

$$Z(0) = \frac{x - \bar{x}}{\sigma} = \frac{0 - 10}{5} = -2$$

La probabilitat que no tingui retard serà

$$P(x < 0) = 1 - 0{,}97725 = 0{,}02275$$



10 minuts és la mitjana de la distribució, aleshores la probabilitat que el proper vol no arribi amb més de 10 minuts de retard és 0,5

$$Z(20) = \frac{x - \bar{x}}{\sigma} = \frac{20 - 10}{5} = 2 = -Z(0)$$

La probabilitat que el proper vol arribi amb més de 20 minuts de retard és la mateixa que la primera qüestió, ja que és simètric, la probabilitat és, aleshores, la complementària 0,97725

9. **El pes dels adults d'una població molt nombrosa es distribueix normalment amb una mitjana de 65 kg i una desviació típica de 3 kg. Si s'agafen dos individus a l'atzar i se'n calculen les probabilitats corresponents justifica què és més probable: a) que cada un dels dos individus tingui un pes comprès entre 63,5 kg i 66,5 kg. b) que un dels dos tingui un pes comprès entre 62 kg i 68 kg i l'altre un pes no comprès entre 62 kg i 68 kg.**

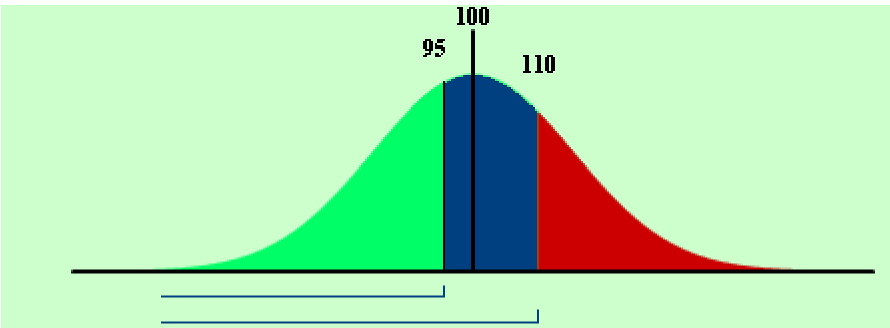
Si tipifiquem els valors de 63,5 i 66,5 donen com valors

$$Z(63{,}5) = 0{,}5; \quad Z(66{,}5) = 0{,}5$$

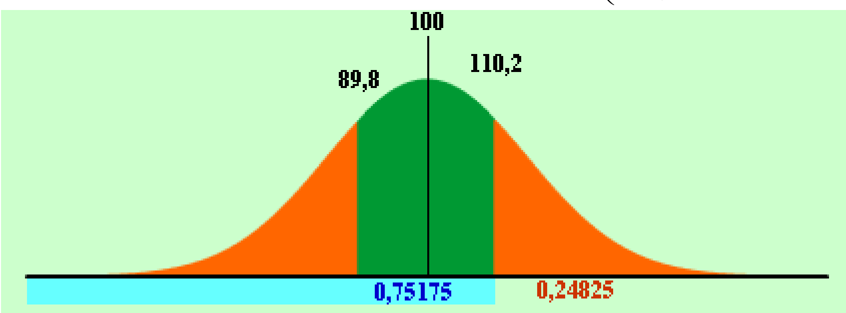
Aleshores la probabilitat que un individu tingui un pes comprès entre aquests valors és
$P(63{,}5 < x < 66{,}5) = 0{,}38292$
i la de que els dos tinguin el pes en aquest interval
$P = 0{,}38292^2 = 0{,}14663$
donat que el pes d'un d'ells és independent del pes de l'altre
Tipifiquem ara els valors 62 i 68 kg
$Z(62) = -1\,;\quad Z(68) = 1$
La probabilitat que un individu tingui un pes comprès en aquest interval és
$P(62 < x < 68) = 0{,}68268$
i la complementària $1 - 0{,}68268 = 0{,}31732$ que no estigui en aquest interval. Demanem que dels dos un formi part de l'interval i altre no. La probabilitat demanada és
$P(I_1 \cap \overline{I_2}) + P(\overline{I_1} \cap I_2) = 2 \cdot 0{,}68268 \cdot 0{,}31732 = 0{,}43325$

10. Diversos test d'intel·ligència han donat una puntuació que segueix una distribució N(100,15). Determina el percentatge de població que obtindria un coeficient entre 95 i 110. Quin interval centrat en 100 conté el 50% de la població?. En una població de 2500 individus, quants s'espera que tinguin un coeficient superior a 125?

Si tipifiquem els valors 95 i 110 obtenim
$$Z(95) = \frac{x-\overline{x}}{\sigma} = \frac{95-100}{15} = -0{,}33 \quad Z(110) = \frac{x-\overline{x}}{\sigma} = \frac{110-100}{15} = 0{,}66$$
Aleshores la probabilitat és
$P(95 < x < 110) = 0{,}74537 - (1 - 0{,}62930) = 0{,}37467$



L'interval, centrat a la mitjana, que conté el 50% de la població, ha de tenir una probabilitat 0,75 que correspon a z=0,68. Aleshores
$$0{,}68 = \frac{x-\overline{x}}{\sigma} = \frac{x-100}{15} \Rightarrow x = 100 \pm 0{,}68 \cdot 15 = \left(\begin{array}{l} 89{,}9 \\ 110{,}2 \end{array}\right.$$



Per calcular la probabilitat d'un coeficient superior a 125

$$Z(125)=\frac{x-\bar{x}}{\sigma}=\frac{125-100}{15}=1{,}66$$

i la probabilitat de ser superior és

$$P(x>125)=1-0{,}95154=0{,}04846$$

I si la població és de 2500

$$N=2500\cdot 0{,}04846=121{,}15\approx 121$$

11. Dels resultats d'un test de cultura s'observa que les puntuacions segueixen una distribució N(65,18). Es vol classificar els examinats entres grups: de baixa cultura, de cultura general acceptable i d'excel·lent cultura general, de manera que en el primer grup hi hagi el 20% de la població, en el segon el 65% i en el tercer el 15%. Quines han de ser les puntuacions que marquin el pas d'un grup a l'altre?

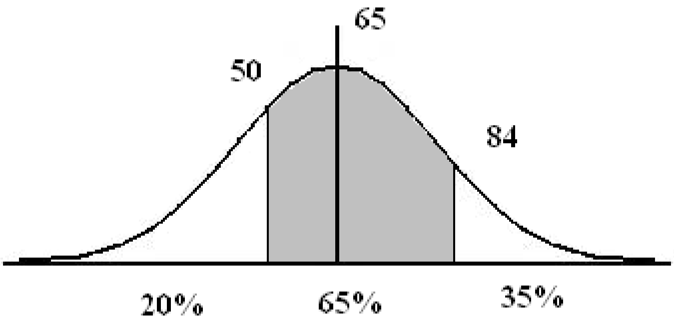
Busquem un valor m tal que $P(x<m)=0{,}2$. Si busquem el valor tipificat aquest correspon a z=-0,84. Aleshores

$$-0{,}84=\frac{m-\bar{x}}{\sigma}=\frac{m-65}{18}\quad\Rightarrow m=65-0{,}84\cdot 18=49{,}88\approx 50$$

El segon interval té l'extrem inferior a 50 i la probabilitat d'aquest fins la mitjana 65 és de 0,3. Hem d'afegir a aquest valor una probabilitat de 0,35 si volem abastar el 65% de la població. Tenim un valor tipificat de 0,85 que correspon a z=1,04

$$1{,}04=\frac{M-\bar{x}}{\sigma}=\frac{M-65}{18}\quad\Rightarrow M=65+1{,}04\cdot 18=83{,}72\approx 84$$

Els extrems són valors de 50 i de 85



12. D'un test fet a 300 persones s'ha obtingut una distribució normal de mitjana 50 i desviació típica 5. Calcula a) les puntuacions que delimiten el 30% central de la distribució. b) El nombre de persones que en el test obté més de 56 o menys de 47.

Un valor 30% central està separat de la mitjana 0,15, això vol dir que hem de buscar un valor tipificat de 0,65, que correspon a z=0,385. Els extrems són

$$\pm 0{,}385=\frac{x-\bar{x}}{\sigma}=\frac{x-50}{5}\quad\Rightarrow x=50\pm 5\cdot 0{,}385=\begin{cases}48{,}075\\ 51{,}925\end{cases}$$

La probabilitat d'obtenir més de 56 la calculem tipificant aquest valor

$$Z(56)=\frac{56-50}{5}=1{,}2$$

$$P(x>56)=0{,}11507$$

De la mateixa manera la probabilitat de valors inferiors a 47

$Z(47) = \frac{47-50}{5} = -0,6$

$P(x < 47) = 0,27425$

La unió d'aquests dos conjunts determina una probabilitat que és la suma de les dues. La quantitat de persones esperades d'una població de 300 és

$N = 300 \cdot (0,11507 + 0,27425) = 116,79 \approx 117$

13. **Si buidem sobre una taula un sac que conté 400 monedes, calcula les probabilitats a) que surtin més de 210 cares. b) que surtin menys de 180 cares. c) que el nombre de cares estigui comprès entre 190 i 210, els dos inclusivament.**

Aproximem aquesta distribució binomial de paràmetres n=400 p=q=0,5 fent servir una normal

$N(\bar{x}, \sigma) = N(np, \sqrt{npq}) = N(400 \cdot 0,5; \sqrt{400 \cdot 0,5 \cdot 0,5}) = N(200,10)$

Considerem que, per la continuïtat de la normal, sortir més de 210 cares és ser superior a 210,5. Tipifiquem aquest valor

$Z(210,5) = \frac{210,5-200}{10} = 1,05$

I la probabilitat d'obtenir més de 210 cares és

$P(x > 210,5) = 1 - 0,85314 = 0,14686$

El mateix amb el valor 180 cares. Sortir menys de 180 cares és ser inferior a 179,5. Si tipifiquem aquest valor

$Z(179,5) = \frac{179,5-200}{10} = -2,05$

i

$P(x < 179,5) = 1 - 0,97982 = 0,02017$

Per últim el valor 189,5 tipificat és

$Z(189,5) = \frac{189,5-200}{10} = -1,05$

i la probabilitat d'obtenir entre 190 i 210 és

$P = 0,85314 - (1 - 0,85314) = 0,70628$

14. **El percentatge de catalans amb estudis mitjans és del 35%. Si se n'agafen 8 a l'atzar, calcula la probabilitat que entre 3 i 5 (els dos inclusivament) tinguin estudis mitjans aplicant una distribució binomial i l'aproximació a una normal**.

Si fem servir una distribució binomial en n=8 p=0,35 i q=0,65 hem de calcular

$$P(3 \le k \le 5) = \binom{8}{3} 0,35^3 0,65^5 + \binom{8}{4} 0,35^4 0,65^4 + \binom{8}{5} 0,35^5 0,65^3 = 0,54687$$

Aproximem a una normal $N(8 \cdot 0,35; \sqrt{8 \cdot 0,35 \cdot 0,65}) = N(2,8;1,35)$ i tipifiquem els valors 2,5 i 5,5

$Z(2,5) = \frac{2,5-2,8}{1,35} = -0,22$; $Z(5,5) = \frac{5,5-2,8}{1,35} = 2$

I obtenim un valor de

$P = 0,97725 - (1 - 0,58706) = 0,56431$