Determinants

1 Calcula els determinants d'ordre 2

$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} -7 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8-15=-7$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6-6=0$ $\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -4$ $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4+3=7$

$\begin{vmatrix} -7 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -35-8=-43$ $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$ $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2$ $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$ $\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -21-6=-27$

2 Calcula els determinants d'ordre 3

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & -1 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 6 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 8 \\ 4 & 4 & -2 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 5-4+0-6-0-10=-15 \qquad \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 15-30-12-3+30-60=-36$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 12+35-10+8-12-45=-11 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -7+6-7+8=0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & -1 \end{vmatrix} = -2+8+54-24+6-6=36 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 6 \end{vmatrix} = 6-1-1-5=-1$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 8 \\ 4 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -30+128+100-100+40-96=42 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 8+8+8+8+8-8=32$$

4 Busca una solució d'aquesta equació sense desenvolupar el determinat. Indica quina propietat s'aplica

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x^2 \end{vmatrix} = 0$$

Si x=1 el determinat té les tres files iguals. Si x=-1 el determinant té dues files iguals. En aquests dos casos el determinant valdrà zero

8. Demostra, sense desenvolupar, que aquest determinant val zero

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$$

Sumem a la tercera columna la segona i obtenim $\begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & a+b+c \\ 1 & c & a+b+c \end{vmatrix}$, la tercera columna té dues columnes proporcionals, la primera i la tercera, aleshores el seu valor és zero

13 Calcula el rang de la matriu

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Podem calcular el rang fent servir el mètode de Gauss i també calculant l'ordre del major determinant no null. Com que no podem fer cap determinant d'ordre 4 el rang de la matriu no és 4. Si ara calculem els determinants d'ordre 3 que podem fer obtenim

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Tots els determinants d'ordre 3 valen zero, aleshores el rang no és 3. Hem de veure si hi ha algun determinant d'ordre 2 que no sigui zero, per exemple

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 4 = 5$$

Aleshores el rang de la matriu és 2

14 Calcula els valors de t per als quals el rang de la matriu és 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & t \end{pmatrix}$$

Les dues primeres columnes són iguals, el rang podrà ser 2 quan la tercera columna no sigui igual a cap de les anteriors, quan $t \neq 3$.

16 Esbrina per a quins valors del paràmetre t la matriu no té inversa. Si és possible calcula la matriu inversa per a t=2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & t & 3 \\ 4 & 1 & -t \end{pmatrix}$$

La matriu tindrà inversa quan el seu determinant sigui 3. El calculem

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & t & 3 \\ 4 & 1 & -t \end{vmatrix} = -t^2 + 4t - 3$$

Demanem que aquest determinant sigui zero resolent

$$-t^2 + 4t - 3 = 0 \Rightarrow t = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{-2} = \frac{-4 \pm 2}{-2} = \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases}$$

Per a t=1 i t=3 la matriu no té inversa ja que el determinat val zero i el rang no és 3. Per a t=2 la matriu té inversa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

17 Resol l'equació BX=C si

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Multipliquem per l'esquerra per la matriu inversa de B i obtenim

$$B^{-1}BX = B^{-1}C \quad \Rightarrow \quad X = B^{-1}C$$

Calculem la matriu inversa de B

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i multipliquem per l'esquerra per la matriu C per obtenir X

$$X = B^{-1}C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

20 Busca la matriu X de manera que AX=B si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Multipliquem per l'esquerra per la matriu inversa de A i obtenim

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \quad \Rightarrow X = A^{-1}B$$

Calculem ara la matriu inversa de A

La matriu inversa és $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ i la matriu X

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & -32 \\ -6 & 13 \end{pmatrix}$$

23 Calcula una matriu X que verifiqui la igualtat AX=B si $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$**. La matriu X també verifica la igualtat XA=B**

Multipliquem per l'esquerra per la matriu inversa de A i obtenim

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \quad \Rightarrow X = A^{-1}B$$

Calculem la matriu inversa de A, per exemple fent servir adjunts

$$A^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

i la matriu X és

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Comprovem que no verifica la segona igualtat

$$XA = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = B$$