1. **Calculeu l'equació de la circumferència de centre A (-2,3) i radi 4**

Els punts (x,y) de la circumferència verifiquen
$d((x,y),(-2,3))=4$

$\sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2}=4$

$(x+2)^2+(y-3)^2=16$

$x^2+y^2+4x-6y=3$

2. **Donada la circumferència d'equació** $x^2+y^2-3x+5y-14=0$**, calculeu el centre i el radi**

Els coeficients de l'equació verifiquen

$-2a=-3 \Rightarrow a=\dfrac{3}{2}$

$-2b=5 \Rightarrow b=-\dfrac{5}{2}$

El centre de la circumferència és el punt $C\left(\dfrac{3}{2},-\dfrac{5}{2}\right)$.

Calculem el radi

$14=r^2-a^2-b^2=r^2-\left(\dfrac{3}{2}\right)^2-\left(-\dfrac{5}{2}\right)^2=r^2-\dfrac{9}{4}-\dfrac{25}{4}$

aleshores

$r^2=14+\dfrac{9}{4}+\dfrac{25}{4}=\dfrac{90}{4} \Rightarrow r=\sqrt{\dfrac{90}{4}}=\dfrac{3\sqrt{10}}{2}$

3. **Calculeu el valor de k que fa que l'equació** $x^2+y^2-8x+10y+k=0$ **representi una circumferència de radi 7**

Calculem les coordenades del centre

$-2a=-8 \Rightarrow a=4$

$-2b=10 \Rightarrow b=-5$

el centre és el punt de coordenades (a,b)=(4,-5)

Si el radi és 7

$-k=r^2-a^2-b^2=7^2-4^2-(-5)^2=49-16-25=8$

d'on $k=-8$

4. **Calcular l'equació d'una circumferència que passi per (0,0), tingui de radi 13 i l'abscissa del centre sigui –12.**

El centre de la circumferència és un punt de la forma $C(-12,b)$. Si aquesta circumferència ha de tenir radi 13 podem escriure la seva equació en funció de b

$\sqrt{(x+12)^2+(y-b)^2}=13$

si desenvolupem

$x^2 + y^2 + 24x - 2by = 13^2 - 12^2 - b^2$

Si la circumferència ha de passar per (0,0) podem substituir aquests valors per x i y i obtenim

$0 = 25 - b^2 \Rightarrow b^2 = 25 \Rightarrow b = \pm 5$

Existeixen dues possibles circumferències, d'equacions

$x^2 + y^2 + 24x - 10y = 0$

$x^2 + y^2 + 24x + 10y = 0$

5. **Calculeu l'equació d'una circumferència de centre (-4,2) i que sigui tangent a la recta** $3x + 4y - 16 = 0$

La distància del centre a la recta dóna el radi de la circumferència

$$d((-4,2);3x + 4y - 16 = 0) = \frac{|-12 + 8 - 16|}{\sqrt{3^3 + 4^2}} = \frac{20}{5} = 4$$

Si el radi és 4, l'equació és

$(x+4)^2 + (y-2)^2 = 16$

$x^2 + y^2 + 8x - 4y = -4$

6. **Calcula l'equació d'una el·lipse d'eixos 8 i 5 centrada a l'origen. Dóna les coordenades dels focus**

Els semieixos són $a = 4$ i $b = \frac{5}{2}$. L'equació és

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{\frac{25}{4}} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{4y^2}{25} = 1$$

Els focus estan sobre l'eix OX

$c^2 + b^2 = a^2$

$$c^2 + \frac{25}{4} = 16$$

$$c = \sqrt{\frac{39}{4}} = \frac{\sqrt{39}}{2}$$

de coordenades $\left(\frac{\sqrt{39}}{2},0\right)$ i $\left(-\frac{\sqrt{39}}{2},0\right)$

7. **Calcula l'equació d'una el·lipse de centre l'origen, focus en el punt (0,3) i semieix major 5**

Calculem b $c^2 + b^2 = a^2 \quad \Rightarrow b = \sqrt{25 - 9} = 4$

L'equació és

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

8. **L'equació d'una el·lipse és $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. Calcula els semieixos i el focus. Calcula el valor de l'excentricitat**

De l'equació obtenim $a=5$ i $b=3$. El paràmetre c serà

$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4$

els focus són els punts $(-4,0)$ i $(4,0)$

L'excentricitat és

$e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}$

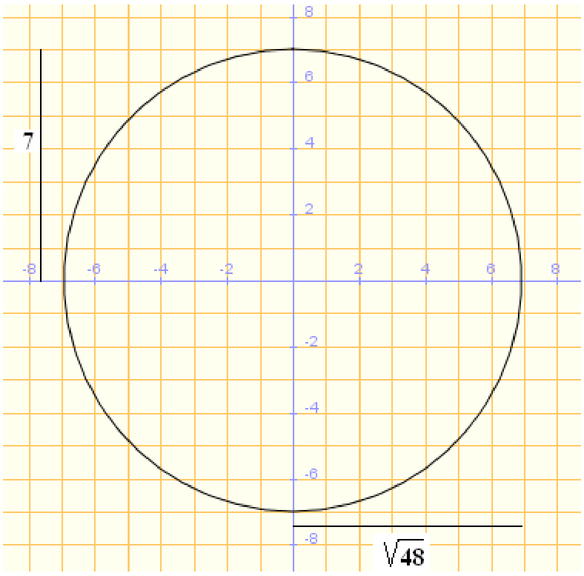
9. **Els focus d'una el·lipse són els punts de l'eix OY de coordenades (0,-1) i (0,1). El semieix vertical és 7. Calcula el semieix horitzontal i l'equació. Dibuixa-la aproximadament**

El semieix vertical b=7 ha de ser major que el semieix horitzontal a.

$a=\sqrt{7^2-1^2}=\sqrt{48}$

L'equació és

$\frac{x^2}{48}+\frac{y^2}{49}=1$



10. **Donada l'equació de l'el·lipse $16x^2+9y^2=144$, calculeu els seus paràmetres i dibuixeu-la**

L'equació es pot transformar dividint per 144 i obtenim $\frac{16x^2}{144}+\frac{9y^2}{144}=1$ que transformem en $\frac{x^2}{\frac{144}{16}}+\frac{y^2}{\frac{144}{9}}=1$. Aleshores

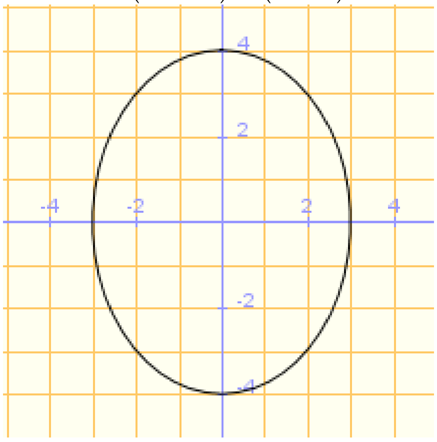
$a^2=\frac{144}{16}\Rightarrow a=3$

$b^2 = \frac{144}{9} \Rightarrow b = 4$

Donat que a<b, l'el·lipse té els focus sobre l'eix OY, la seva orientació és vertical. Els focus són

$c = \sqrt{16-9} = \sqrt{7}$

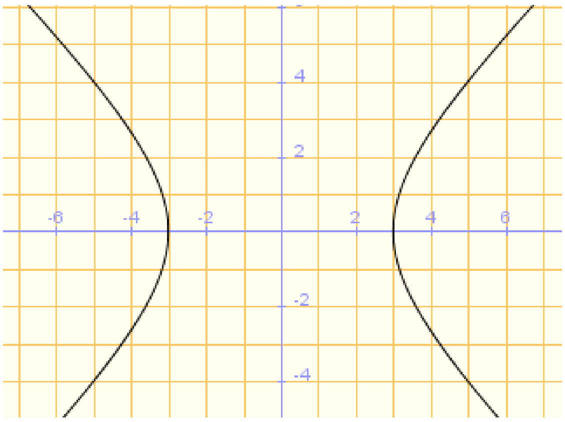
els punts $\left(0,-\sqrt{7}\right)$ i $\left(0,\sqrt{7}\right)$



11. Donada l'equació de la hipèrbola $x^2 - y^2 = 9$, calcula els semieixos, la semidistància focal i l'excentricitat

L'equació $x^2 - y^2 = 9$ es pot transformar en $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1$ d'on a=3 i b=3.

$c^2 = a^2 + b^2 = 9 + 9 = 18 \quad \Rightarrow c = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$



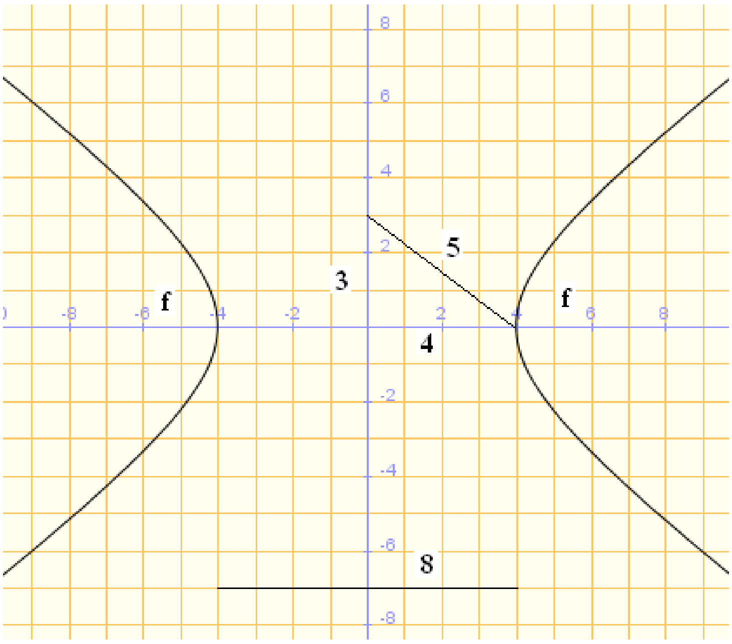
l'excentricitat és $e = \frac{c}{a} = \frac{3\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2}$

12. Calcula l'equació d'una hipèrbola que té els focus en els punts (5,0) i (-5,0) i la distància entre els vèrtexs és de 8. Representa aquests elements en un dibuix

El paràmetre a és la semidistància focal a=4

Dels focus sabem que c=5. Calculem $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{25-16} = 3$

L'equació és $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$



13. Calcular l'equació d'una hipèrbola de distància focal 20 i excentricitat e=1,25

Sabem $2c = 20 \Rightarrow c = 10$ i $e = 1{,}25 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{10}{a} \Rightarrow a = 8$, d'on podem calcular

$b^2 = c^2 - a^2 = 10^2 - 8^2 = 36$

i l'equació és

$$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$$

14. Calcular els paràmetres de $4x^2 - 9y^2 = 36$

Transformem l'equació, primer dividint per 36

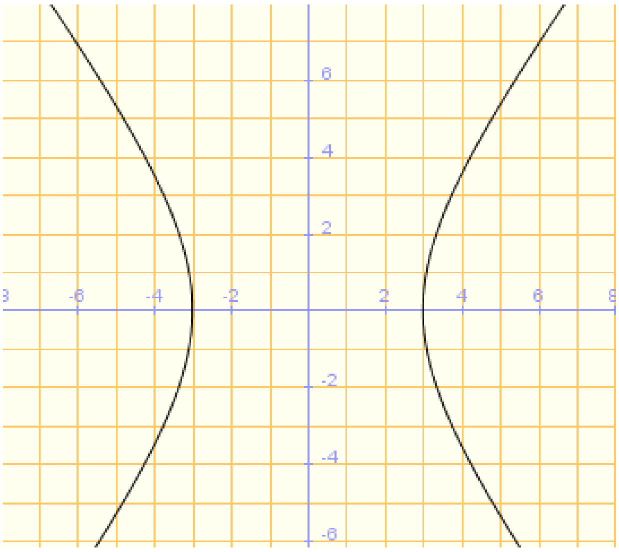
$$4x^2 - 9y^2 = 36 \Rightarrow \frac{4x^2}{36} - \frac{9y^2}{36} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$$

$a^2 = 9 \quad \Rightarrow a = 3$

$b^2 = 4 \quad \Rightarrow b = 2$

$c^2 = a^2 + b^2 = 13 \Rightarrow c = \sqrt{13}$

Els focus són els punts $(-\sqrt{13},0)$ i $(\sqrt{13},0)$, els vèrtexs els punts (3,0) i (-3,0)



15. Les asímptotes d'una hipèrbola són les rectes que passen per l'origen de pendent $m = \pm\frac{b}{a}$. Si les asímptotes d'una hipèrbola són les rectes d'equacions $3x - 4y = 0$ i $3x + 4y = 0$, i el semieix horitzontal és 8, digues l'equació d'aquesta hipèrbola

De les equacions de les asímptotes obtenim els pendents $m = \pm\frac{3}{4}$, d'on, si a=8 ha de ser b=6. L'equació és

$$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$$

16. Trobar l'equació de la paràbola de focus el punt $\left(0, -\frac{4}{3}\right)$ i de directriu la recta $y - \frac{4}{3} = 0$

Els punts de la paràbola estan a la mateixa distància del focus que de la recta directiu. Podem plantejar

$\sqrt{x^2 + \left(y + \frac{4}{3}\right)^2} = y - \frac{4}{3}$, si elevem al quadrat i simplifiquem

$$x^2 + \frac{16}{3}y = 0 \quad \Rightarrow x^2 = -\frac{16}{3}y$$

17. Trobar l'equació de la paràbola de vèrtex l'origen de coordenades, d'eix l'eix OY i que passi pel punt (6,-3)

L'equació de la paràbola és de la forma $x^2 = -4ay$, si la paràbola ha de passar per (6,-3) podem calcular el valor de a

$36 = -4a(-3) \quad \Rightarrow 36 = 12a \Rightarrow a = 3$

l'equació de la paràbola és $x^2 = -12y$

18. Trobar el focus i la directriu de la paràbola d'equació a) $y^2 = 6x$ i b) $x^2 = 8y$

La primera

$-4a = 6 \quad \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$

el focus de la paràbola és el punt $\left(\frac{3}{2},0\right)$ i la directriu la recta $x = -\frac{3}{2}$

I la segona

$-4a = 8 \quad \Rightarrow a = -2$

el focus de la paràbola és el punt $(0,2)$ i la directriu la recta $y = -2$

19. La directriu d'una paràbola és la recta $y = -3$ i el vèrtex el punt (0,0). Calcula l'equació de la paràbola i el focus

El focus ha de ser el punt (0,3), situat a l'eix OY ja que la directriu és una recta horitzontal. L'equació és

$y + 3 = \sqrt{x^2 + (y-3)^2}$

$y^2 + 6y + 9 = x^2 + y^2 - 6y + 9$

$x^2 = 12y$

Observem com la distància del focus a la directriu és $p = 6$, l'equació és $x^2 = 2py$