Còniques II

1.Busca l'equació de la circumferència ens els casos a) centre C(0,0) i radi 3. b) centre C(3,-2) i radi $\sqrt{3}$

a)

L'equació de la circumferència és

$(x-0)^2+(y-0)^2=3^2 \quad \Rightarrow x^2+y^2=9$

b)

$(x-3)^2+(x+2)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow x^2+y^2-6x+4x+11=0$

2. Busca el centre i el radi de les circumferències següents a) $x^2+y^2-8x+2y+13=0$ **b)** $2x^2+2y^2-8x-4y-8=0$ **i c)** $x^2+y^2+4y-13=0$

a)

Plantegen

$-2a=-8 \Rightarrow a=4$

$-2b=2 \Rightarrow b=-1$

el centre és el punt $(4,-1)$. El radi serà

$-13=r^2-a^2-b^2 \Rightarrow r^2=-13+16+1=4 \Rightarrow r=2$

b)

Simplifiquem

$2x^2+2y^2-8x-4y-8=0 \quad \Rightarrow x^2+y^2-4x-2y-4=0$

$-2a=-4 \Rightarrow a=2$

$-2b=-2 \Rightarrow b=1$

el centre és el punt $(2,1)$. El radi serà

$4=r^2-4-1 \Rightarrow r^2=9 \Rightarrow r=3$

c)

$-2a=0 \Rightarrow a=0$

$-2b=4 \Rightarrow b=-2$

el centre de la circumferència és el punt $(0,-2)$. El radi

$13=r^2-4 \Rightarrow r^2=17 \Rightarrow r=\sqrt{17}$

3. Busca l'equació de la circumferència a) que té el centre a (0,0) i passa pel punt A (-3,2). b) que té el centre a (1,4) i passa per a(-6,-1)

a) Si el centre de la circumferència és (0,0) i passa per (-3,2) el radi ha de ser el mòdul del vector d'origen el centre i final aquest punt. El radi de la circumferència és

$|(-3,2)|=\sqrt{13}$

i l'equació $x^2+y^2=13$

b) El radi de la circumferència és la distància entre el centre i el punt A. E valor del radi és

$|(-7,-5)|=\sqrt{49+25}=\sqrt{74}$

i l'equació de la circumferència

$(x-1)^2+(y-4)^2=74 \Rightarrow x^2+y^2-2x-8y=57$

6. Busca l'equació de la circumferència que té com a centre el punt C(3,2) i que és tangent a la recta $3x+4y+2=0$

Si la circumferència és tangent a la recta, el radi ha de ser la distància entre el centre i la recta tangent. Calculem la distància entre el punt i la recta

$$r = d((3,2);3x+4y+2=0) = \frac{|9+8+2|}{\sqrt{9+16}} = \frac{19}{5}$$

i l'equació de la circumferència és

$$(x-3)^2+(y-2)^2 = \left(\frac{19}{5}\right)^2$$

16. Busca l'equació de l'el·lipse si sabem que a) els focus són els punts (2,0) i (-2,0) i la suma de les distàncies 5. b) els focus són (0,2) i (0,-2) i la suma de les distàncies 5

a)

$c=2;\ a=\frac{5}{2}$. Calculem $b=\sqrt{a^2-c^2} = \sqrt{\frac{25}{4}-4} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$

i l'equació és

$$\frac{x^2}{\frac{25}{4}}+\frac{y^2}{\frac{9}{4}}=1 \Rightarrow \frac{4x^2}{25}+\frac{4y^2}{9}=1 \Rightarrow 36x^2+100y^2=225$$

b) els focus estan sobre l'eix OY, el valor de $b=\frac{3}{2}$, l'equació és

$$\frac{x^2}{\frac{9}{4}}+\frac{y^2}{\frac{25}{4}}=1 \Rightarrow \frac{4x^2}{9}+\frac{4y^2}{25}=1 \Rightarrow 100x^2+36y^2=225$$

19. Busca l'equació reduïda de l'el·lipse si sabem que a) té un vèrtex a A(6,0) i una distància focal de 10. b) té un vèrtex a B(0,4) i una distància focal de 10

a)

$a=6,\ c=5,\ b=\sqrt{36-25}=\sqrt{11}$

l'equació és

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{11}=1$$

b)

Els focus han d'estar sobre l'eix OY, ja que $c=5$ i $b=4$

$a=\sqrt{25+16}=\sqrt{41}$

l'equació és

$$\frac{x^2}{41}+\frac{y^2}{16}=1$$

21. Busca els semieixos, la semidistància focal i l'excentricitat de l'el·lipse que té d'equació a) $x^2+y^2=9$ **b)** $16x^2+9y^2=144$

a) transformem l'equació

$x^2+y^2=9 \Rightarrow \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{9}=1$
d'on $a=b=3$, els semieixos són 3, la distància focal és 0 i l'excentricitat 0. És una circumferència
b)
$$16x^2+9y^2=144 \quad \Rightarrow \frac{16x^2}{144}+\frac{9y^2}{144}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{144}{16}}+\frac{y^2}{\frac{144}{9}}=1$$
$$a^2=\frac{144}{16} \Rightarrow a=\sqrt{\frac{144}{16}}=\frac{12}{4}=3$$
$$b^2=\frac{144}{9} \Rightarrow b=\sqrt{\frac{144}{9}}=\frac{12}{3}=4$$
$$c^2=a^2-b^2=16-9=7 \Rightarrow c=\sqrt{7}$$
els semieixos són 3 i 4, és una el·lipse que té els focus sobre l'eix 0Y i la semidistància focal és $\sqrt{7}$. L'excentricitat
$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{7}}{3}$$

22. Busca l'equació reduïda de la hipèrbola si sabem que a) els focus són (3,0) i (-3,0) i la diferència de distàncies 4. b) Els focus són (0,6) i (0,-6) i la diferència de distàncies 2.

a)
$a=2, \quad c=3$, calculem $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{5}$
l'equació és
$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$$
b)
$a=1, \quad c=6$, calculem $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{35}$
l'equació és
$$\frac{x^2}{35}-y^2=1$$
els focus estan sobre l'eix OY

24. Busca l'equació de la hipèrbola si sabem que a) els vèrtexs són (10,0) i (-10,0) i l'excentricitat e=2. b) els vèrtexs són (0,4) i (0,-4) i l'excentricitat e=2

a)
a=10 i podem calcular c a partir de l'excentricitat
$e=2=\dfrac{c}{10} \Rightarrow c=20$, calculem $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{300}$
té d'equació $\dfrac{x^2}{100}-\dfrac{y^2}{300}=1$
b)
Els focus de la hipèrbola estan sobre l'eix OY.

$b = 4, \quad e = 2 = \frac{c}{a} \Rightarrow c = 2a$

$16 = b^2 = c^2 - a^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2 \Rightarrow a = \sqrt{\frac{16}{3}}$

l'equació de la hipèrbola és

$$\frac{x^2}{\frac{16}{3}} - \frac{y^2}{16} = 1 \Rightarrow \frac{3x^2}{16} - \frac{y^2}{16} = 1$$

27. Busca els semieixos, la semidistància focal i l'excentricitat de la hipèrbola d'equació a) $x^2 - y^2 = 9$ **b)** $16x^2 - 9y^2 = 144$

a)

Dividint per 9 obtenim $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1$, d'on a=b=3 i $c^2 = a^2 + b^2 = 18 \quad c = \sqrt{18}$

i l'excentricitat $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{18}}{3}$

b)

Transformem l'equació en

$16x^2 - 9y^2 = 144 \quad \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

d'on a=3 i b=4. Calculem $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$, l'excentricitat $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}$

31. Busca l'equació de la paràbola que té com a directriu la recta y+5=0 i com a focus els punt P(0,5)

La recta directiu és y=-5, una recta horitzontal, si el focus està sobre l'eix 0Y, el vèrtex és l'origen de coordenades (0,0) i el paràmetre de la paràbola és p=10. L'equació és

$x^2 = 2py \quad \Rightarrow x^2 = 20y$

32. Busca el valor del paràmetre p de manera que la paràbola d'equació $y^2 = 2px$ **passi pel punt P(3,-1)**

Demanem que el punt P verifiqui l'equació de la paràbola

$(-1)^2 = 2p \cdot 3 \Rightarrow p = \frac{1}{6}$

33. Busca l'equació de la paràbola que té l'eix paral·lel al d'abscisses si sabem que el seu vèrtex és el punt V(1,-2) i que passa pel punt P(4,1)

L'equació de la paràbola és de la forma $(y + 2)^2 = 2p(x - 1)$

Si passa per p(4,1) ha de verificar $(1 + 2)^2 = 2p(4 - 1) \Rightarrow 9 = 6p \Rightarrow p = \frac{3}{2}$