Còniques

El·lipse

Busca l'equació d'una el·lipse de focus (-2,0) i (2,0) on la suma de les seves distàncies a un punt és 7

Podem partir de l'equació fonamental de distàncies

$$\sqrt{(x+2)^2+y^2}+\sqrt{(x-2)^2+y^2}=7$$

i desenvolupar aquesta expressió, o bé fer servir que en aquest cas $c^2=4$ i $a^2=\frac{49}{4}$ per obtenir

$$b^2=a^2-c^2=\frac{49}{4}-4=\frac{33}{4}$$

i fer-los servir per obtenir directament l'equació

$$\frac{33}{4}x^2+\frac{49}{4}y^2=\frac{33}{4}\cdot\frac{49}{4}\Rightarrow 132x^2+196y^2=1617$$

Busca l'equació d'una el·lipse que té un eix major de 16 i una excentricitat $e=\frac{1}{4}$

Sabem que a=8, calculem c

$$\frac{1}{4}=\frac{c}{a}\Rightarrow c=2$$

i el valor b serà

$$b^2=a^2-c^2=64-4=60$$

Té d'equació

$$\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{60}=1\quad\Rightarrow 60x^2-64y^2=3840$$

Busca l'equació de l'el·lipse si sabem que a) els focus són (2,0) i (-2,0) i la suma de les distàncies 5 b) els focus són (0,2) i (0,-2) i la suma de les distàncies 5

Si $2a=5\Rightarrow a=\frac{5}{2}$, c=2 i $b^2=a^2-c^2=\frac{25}{4}-4=\frac{9}{4}$

L'equació és

$$\frac{x^2}{\frac{25}{4}}+\frac{y^2}{\frac{9}{4}}=1\quad\Rightarrow\frac{4x^2}{25}+\frac{4y^2}{9}=1$$

En la segona hem situat els focus sobre l'eix OY, els valors de a, b i c són els mateixos però canviem x per y i l'equació serà

$$\frac{4x^2}{9}+\frac{4y^2}{25}=1$$

Busca l'equació d'una el·lipse si sabem que té a) un vèrtex a (6,0) i una distància focal de 10 b) un vèrtex a (0,4) i una distància focal de 10

El vèrtex a (6,0) implica que a=6. Si la distància focal és 10, aleshores c=5 d'on

$$b^2=a^2-c^2=36-25=11$$

i l’equació és

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{11}=1$$

Si el vèrtex és (0,4) serà b=4 i c=5, d’on

$$a^2=b^2+c^2=16+25=41$$

i l’equació

$$\frac{x^2}{41}+\frac{y^2}{16}=1$$

Busca els semieixos, la semidistància focal i l’excentricitat de l’el·lipse d’equació

$x^2+y^2=9$ **i** $16x^2+9y^2=144$

Dividim per 9 la primera equació i obtenim

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{9}=1\Rightarrow\begin{cases}a=3\\b=3\end{cases}$$

aleshores $c^2=a^2-b^2=0$

els semieixos són 3 i la semidistància focal 0. És una circumferència

Dividim per 144 la segona equació i obtenim

$$\frac{16x^2}{144}+\frac{9y^2}{144}=1\quad\Rightarrow\begin{cases}a^2=\dfrac{144}{16}\\b^2=\dfrac{144}{9}\end{cases}$$

els valors dels semieixos són $a=\frac{12}{4}=3$ i $b=\frac{12}{3}=4$. Com que a<b és una el·lipse vertical. La semidistància focal és $\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$. L’excentricitat $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{7}}{3}$

Hipèrbola

Busca l’equació de la hipèrbola si sabem que a) els focus són (3,0) i (-3,0) i la diferència de distàncies 4 b) els focus són (0,6) i (0-6) i la diferència de distàncies 2

$2a=4\Rightarrow a=2$

De a=2 i c=3 obtenim

$a^2+b^2=c^2\quad\Rightarrow b^2=5$

i l’equació és

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$$

Si la diferència de distàncies és 2 serà a=1. c=6 i $b^2=35$. Els focus són punts de l’eix OY. L’equació és

$$\frac{x^2}{35}-\frac{y^2}{1}=1$$

Busca l’equació de la hipèrbola si sabem que a) els vèrtexs són (10,0) i (-10,0) i l’excentricitat e=2 b) els vèrtexs són els punts (0,4) i (0,-4) i e=2

Dels vèrtexs obtenim a=10 i $e = 2 = \frac{c}{a} = \frac{c}{10} \Rightarrow c = 20$, aleshores $b^2 = 400 - 100 = 300$

L’equació serà

$$\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{300} = 1$$

Els vèrtexs són punts de l’eix OY. a=4 i c=8. Aleshores $b^2 = 64 - 16 = 48$

L’equació

$$\frac{x^2}{48} - \frac{y^2}{16} = 1$$