

Combinatòria

1. Quantes parelles diferents es poden formar amb les cinc vocals de manera que no es puguin repetir?

$$V_{5,2} = 5 \cdot 4 = 20$$

2. Quantes parelles diferents es poden formar amb les cinc vocals de manera que es puguin repetir?

$$Vr_{5,2} = 5^2 = 25$$

3. De quantes maneres diferents es poden cobrir els càrrecs de president, secretari i tresorer d'un club de bàsquet si sabem que hi ha 12 possibles candidats?

$$V_{12,3} = 12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320$$

4. Quants nombres de tres xifres es poden formar amb els dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sense que es repeteixi cap xifra?

Entenem que s'accepta 001 com un número de tres xifres. Poden començar amb zero

$$V_{10,3} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$$

5. Quants nombres de tres xifres significatives es poden formar amb els dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sense que es repeteixi cap xifra?

Ara la primera xifra ha de ser major o igual a 1

Per la xifra de les centenes tenim 9 possibilitats, per la xifra de les desenes també 9 possibilitats (recuperem l'opció 0 i no tenim la xifra de les centenes) i per la xifra de les unitats 8 possibilitats. Això és

$$9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$$

Una segona manera de fer aquest exercici és treure de les variacions de l'exercici anterior (720) les 72 que comencen per zero, això fa $720 - 72 = 648$

6. Amb les xifres 1, 2, 3, 4, 5 quants nombres diferents de quatre xifres es poden formar de manera que la xifra 2 ocupi sempre el lloc de les unitats?

Si la xifra 2 sempre ocupa el lloc de les unitats resten 4 xifres per a tres posicions

$$V_{4,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

7. Quants nombres de tres xifres es poden formar amb les xifres 2, 4, 6, 8 sense que se'n repeteixi cap? Quants acaben en 64? Quants són més grans de 500? Quant sumen tots el nombres de tres xifres que es poden obtenir?

Podem formar $V_{4,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ nombres de tres xifres

Si fixem el final 64 resta omplir la posició de les centenes que podem fer amb les dues xifres que ens queden

Són més grans de 500 els que comencin amb 6 o 8. Fixem aquestes xifres a les centenes i resten tres xifres per a les dues posicions que resten

$$2 \cdot V_{3,2} = 2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$$

Estudiem la columna de les unitats. Hi haurà 6 acabats en 2, 6 en 4, 6 en 6 i 6 en 8. La suma de la columna de les unitats serà

$$6x2 + 6x4 + 6x6 + 6x8 = 120$$

A les columnes de les desenes i les centenes tindrem el mateix. La suma de tots els nombres serà

$$12000 + 1200 + 120 = 120(100 + 10 + 1) = 120 \cdot 111 = 13320$$

8. Si s'escriuen en ordre creixent les variacions de quart ordre sense repetició que es poden formar amb les nou xifres significatives, quin lloc ocupa la variació 3254?

Podem formar $V_{9,4} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$

D'elles comencen per 1 $V_{8,3} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$, i altres 336 comencen per 2

De les que comencen per 3, tenen un 1 a la segona posició

$$V_{7,2} = 7 \cdot 6 = 42$$

i comencen per 321 $V_{6,1} = 6$, i per 324 també $V_{6,1} = 6$

les dues següents són 3251 i 3254. Aquesta última està en la posició

$$336 + 336 + 42 + 6 + 6 + 1 + 1 = 728$$

9. De quantes maneres es poden col·locar deu cantaires d'un cor si dos d'ells han d'estar sempre en els extrems?

Fixem els dos dels extrems, que poden estar de 2 maneres diferents. La resta són 8

$$2 \cdot P_8 = 2 \cdot 8! = 2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 80640$$

10. Amb nou alumnes d'una classe volem formar tres equips de tres alumnes cada un. De quantes maneres es pot fer?

$$\text{El primer dels equips es pot fer de } C_{9,3} = \binom{9}{3}$$

Si tenim ja format aquest primer equip, el segon es pot fer de $C_{6,3} = \binom{6}{3}$, donat que

només resten sis alumnes

I amb aquest format el tercer equip només el podem fer d'una manera: amb els tres

$$\text{alumnes que queden } \binom{3}{3}$$

En total tenim

$$\binom{9}{3} \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} \cdot 1 = 1680$$

11. Quants nombres de quatre xifres diferents, que siguin múltiples de tres, es poden formar amb els dígit 1, 2, 3, 4 i 6?

Són múltiples de tres aquells formats per les quatre xifres 2,3,4,6 o 1,2,3,6. No hi ha altres quatre xifres que puguin formar múltiples de tres

$$\text{Aleshores } 2 \cdot V_{4,4} = 2 \cdot P_4 = 2 \cdot 4! = 48$$

12. En unir cinc vèrtexs d'un heptàgon, quants pentàgons s'obtenen?

Si unim el vèrtex A amb B obtenim el mateix costat que unint el vèrtex B amb A

$$C_{7,5} = \binom{7}{5} = \binom{7}{2} = 21$$

13. En cada programa de ràdio d'una emissora intervenen quatre locutors. Si la cadena disposa de vint locutors, de quantes maneres diferents es pot presentar un programa?

Entenem que una manera diferent de presentar un programa és quan intervenen locutors diferents, no quan intervenen els mateixos en diferent ordre. Aleshores

$$C_{20,4} = \binom{20}{4} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 4845$$

14. Quantes rectes es poden traçar amb vuit punts situats en un pla de manera que no es poden trobar tres punts alineats?

Una recta ve definida per dos punts i la recta que uneix AB és la mateixa que uneix BA. Serà

$$C_{8,2} = \binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$$

15. A una reunió assisteixen 30 persones. Es decideix constituir comissions de sis persones per estudiar un pla determinat. Quantes comissions diferents es poden formar?

$$C_{30,6} = \binom{30}{6} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 593775$$

16. A una reunió assisteixen disset persones i totes se saluden. Quantes salutacions s'intercanvien?

$$C_{17,2} = \binom{17}{2} = 136$$

17. Una bossa conté dotze boles de mides diferents, de les quals cinc són negres, quatre blanques i tres vermelles. De quantes maneres es pot treure un grup de sis boles que contingui, almenys, una bola de cada color?

$$\text{El grup de sis boles es pot treure de } C_{12,6} = \binom{12}{6} = 924$$

El grup no pot ser de boles d'un sol color (només n'hi ha 5 de negres)

El grup tindrà només dos colors en els casos

$$\text{Negres i blanques: De 9 boles es forma un grup de 6 } C_{9,6} = \binom{9}{6} = 84$$

$$\text{Negres i vermelles. De 8 es forma un grup de 6 } C_{8,6} = \binom{8}{6} = 28$$

$$\text{Blanques i vermelles. De 7 es forma un grup de 6 } C_{7,6} = \binom{7}{6} = 7$$

Els grups que tinguin, almenys, una bola de cada color són

$$924 - 84 - 28 - 7 = 805$$

18. Les matrícules dels cotxes d'un país estan formades per dues lletres diferents seguides de tres nombres, que poden estar repetits. Quants cotxes es poden matricular sense canviar el sistema? Se suposa que l'alfabet té vint-i-sis lletres.

$$\text{Les dues lletres diferents poden ser } V_{26,2} = 26 \cdot 25 = 650$$

Per a cada una d'aquestes sèries tenim 1000 números. Es poden fer 650.000 matrícules diferents

19. Busca el nombre de capicues de vuit xifres. I de nou xifres, quants n'hi ha?

Entenem que un capicua de vuit xifres és de la forma abcdcdca. Es poden formar tants com les sèries possibles de quatre termes

$$V_{10,4} = 10^4 = 10000$$

D'aquests n'hi ha la dècima part que comencen amb zero, i no són, pròpiament, de vuit xifres $10000 - 1000 = 9000$

Els de nou xifres són de la forma abcddcab. Són $V_{10,5} = 10^5 = 100000$ i també la dècima part comencen amb zero, $100.000 - 10.000 = 90.000$

20. De quantes maneres es poden col·locar en fila deu alumnes si n'hi ha dos que ocupen sempre el mateix lloc, un primer i l'altre últim?

Fixem el primer i l'últim i resten a col·locar les permutacions de 8 elements

$$P_8 = 8! = 40320$$

21. De quantes maneres diferents es poden asseure tres nois i dues noies en una fila de butaques d'un cinema si tenim en compte que no hi pot haver dos nois junts ni dues noies juntes?

Els nois han de seure en els extrems i al centre, les noies a la segona i quarta posició. Les maneres diferents de situar-se el nois són $P_3 = 3! = 6$, i per cada una d'elles, les noies poden asseure de $P_2 = 2! = 2$. En total es poden asseure de 12 maneres diferents

22. Una secretaria ha escrit dotze cartes adreçades a dotze persones diferents amb els seus corresponents sobres. Introdueix les cartes en els sobres a l'atzar. De quantes maneres diferents pot omplir els sobres? En quantes d'aquestes podem trobar la carta adreçada a la persona A dins del sobre corresponent?

Les dotze cartes es poden situar en els dotze sobres de

$$P_{12} = 12! = 479.001.600$$

Si fixem la carta adreçada a A dins del seu sobre, la resta es poden col·locar de

$$P_{11} = 11! = 39.916.800$$

23. Per fer una aposta a la loteria primitiva cal marcar 6 nombres d'una sèrie de 49. De quantes maneres diferents poden marcar-se?. De quantes maneres diferents es poden marcar 5 números?

Sis números es podem marcar de

$$C_{49,6} = \binom{49}{6} = 13.983.816$$

I cinc

$$C_{49,5} = \binom{49}{5} = 1.906.884$$