

1. Calcula les derivades de

$$f(x) = (x^2 + x + 1)^3$$

$$f(x) = (\ln(2x + 3))^5$$

$$f(x) = (3x^4 + 7)^5$$

$$f(x) = (3x^2 + 2x + 7)^{\frac{1}{2}}$$

$$f(x) = (x^2 + x + 1)^3; f'(x) = 3(x^2 + x + 1)^2(2x + 1)$$

$$f(x) = (\ln(2x + 3))^5; f'(x) = 5(\ln(2x + 3))^4 \cdot \frac{1}{2x + 3} \cdot 2 = \frac{10(\ln(2x + 3))^4}{2x + 3}$$

$$f(x) = (3x^4 + 7)^5; f'(x) = 5(3x^4 + 7)^4 \cdot 12x^3 = 60x^3(3x^4 + 7)^4$$

$$f(x) = (3x^2 + 2x + 7)^{\frac{1}{2}}; f'(x) = \frac{1}{2}(3x^2 + 2x + 7)^{-\frac{1}{2}} \cdot (6x + 2) = \frac{3x + 1}{\sqrt{3x^2 + 2x + 7}}$$

2. Calcula les derivades de les funcions següents

$$f(x) = \tan^2\left(\frac{x}{2}\right) \quad f'(x) = 2 \tan\left(\frac{x}{2}\right) \left(1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) \frac{1}{2} =$$

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) \left(1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

$$f(x) = (1 + x^4)^{\frac{1}{2}} \quad f'(x) = \frac{1}{2}(1 + x^4)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4x^3 = \frac{2x^3}{\sqrt{1 + x^4}}$$

$$f(x) = x \sin x + \cos x \quad f'(x) = \sin x + x \cos x - \sin x = x \cos x$$

$$f(x) = (1 - \sin x) \tan x \quad f'(x) = -\cos x \tan x + (1 - \sin x)(1 + \tan^2 x)$$

$$f(x) = \sqrt{\ln(\tan(x^2 + 1))} \quad f'(x) = \frac{1}{2}(\ln(\tan(x^2 + 1)))^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\tan(x^2 + 1)}(1 + \tan^2(x^2 + 1)) \cdot 2x =$$

$$= \frac{x(1 + \tan^2(x^2 + 1))}{\tan(x^2 + 1)\sqrt{\ln(\tan(x^2 + 1))}}$$

5. Calcula la derivada de la funció $f(x) = \sqrt{\frac{ax + b}{cx + d}}$

$$f(x) = \sqrt{\frac{ax + b}{cx + d}} = \left(\frac{ax + b}{cx + d}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{ax + b}{cx + d}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{a(cx + d) - c(ax + b)}{(cx + d)^2}\right) = \frac{ad - cb}{2(cx + d)^2 \sqrt{\frac{ax + b}{cx + d}}}$$

7. Tenim les funcions $f(x) = x^2 e^{-ax}$ i $g(x) = x^2$. Determina els punts en què f(x) i g(x) tenen el mateix pendent

Les derivades han de ser iguals. Les derivades de f(x) i g(x) són

$$f'(x) = 2xe^{-ax} - ax^2 e^{-ax} = xe^{-ax}(2 - ax)$$

$$g'(x) = 2x$$

Si igualem aquestes derivades obtenim l'equació

$$2x = xe^{-ax}(2 - ax)$$

Una de les solucions és $x=0$

9. Calcula les derivades successives de $f(x) = \frac{1}{x^2}$ i busca l'expressió general que dóna la derivada de qualsevol ordre

Calculem les primeres derivades de $f(x) = x^{-2}$ i obtenim

$$f'(x) = -2x^{-3}$$

$$f''(x) = 2 \cdot 3x^{-4}$$

$$f'''(x) = -2 \cdot 3 \cdot 4x^{-5}$$

i, en general, la derivada n-èsima

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n \cdot (n+1)x^{-(n+2)} = (-1)^n (n+1)!x^{-(n+2)}$$

10. Calcula la derivada n-èsima de $y = \sin x$

$$y' = \cos x$$

$$y'' = -\sin x$$

$$y''' = -\cos x$$

$$y^{(4)} = \sin x$$

aleshores la funció i la derivada d'ordre 5 coincideixen, i es repeteix a la derivada 10, 15,..La primera derivada i les d'ordre 6, 11, 16, $5n+1$ seran $\cos x$, les d'ordre 2,7,12,.. $5n+2$ són $-\sin x$, i així successivament

13. Calcula la derivada n-èsima de $y = e^{ax}$

Les primeres derivades són

$$y' = ae^{ax}, \quad y'' = a^2e^{ax}, \quad y''' = a^3e^{ax}$$

Aleshores la derivada d'ordre n serà

$$y^{(n)} = a^n e^{ax}$$

14. Calcula la derivada n-èsima de $y = xe^x$

$$y' = e^x + xe^x = (1+x)e^x$$

$$y'' = e^x + (1+x)e^x = (2+x)e^x$$

$$y''' = e^x + (2+x)e^x = (3+x)e^x$$

i, en general,

$$y^{(n)} = (n+x)e^x$$

21. Suposem que $f(x)=x \cdot g(x)$, en que $g(x)$ és una funció contínua a $x=0$ i no derivable. Quant val $f'(0)$?

Calculem

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)g(x+h) - xg(x)}{h}$$

i si $x=0$

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(0+h)g(0+h) - 0g(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{hg(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} g(h) = g(0)$$

24. Busca els punts de la gràfica $y = \frac{2}{x}$ en què la derivada de la funció val -2

Podem plantejar

$$y' = \frac{-2}{x^2} = -2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

Corresponen a dos punts

$$(1, f(1)) = (1, 2)$$

$$(-1, f(-1)) = (-1, -2)$$

26. Una làmina circular de radi $r(t) = 3t + 2$ va augmentant de mida amb el temps. Quina és la velocitat de creixement del radi?. Quina és la velocitat de creixement de l'àrea $A(t)$?

La velocitat de creixement del radi és la derivada de $r(t)$

$$r'(t) = 3$$

L'àrea ve donada, en funció del temps t , per

$$A(t) = \pi r^2 = \pi (3t + 2)^2$$

La velocitat de creixement de l'àrea és la derivada

$$A'(t) = 2\pi(3t + 2)3 = 6\pi (3t + 2)$$

27. El costat d'un triangle equilàter creix a raó de 5 cm per segon. A quina velocitat creix l'àrea quan el costat del triangle fa 26 cm?

Inicialment el costat és a , el creixement del costat ve donat per $c(t) = a + 5t$

L'àrea del triangle equilàter és

$$A = \frac{c^2 \sqrt{3}}{4}$$

i en funció del costat $c(t)$

$$A(t) = \frac{(a + 5t)^2 \sqrt{3}}{4}$$

La derivada dóna la velocitat de creixement de l'àrea

$$A'(t) = \frac{5\sqrt{3}(a + 5t)}{2}$$

quan el costat $a + 5t = 26$ la velocitat de creixement de l'àrea serà

$$A' = \frac{26 \cdot 5\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2 / \text{s}$$