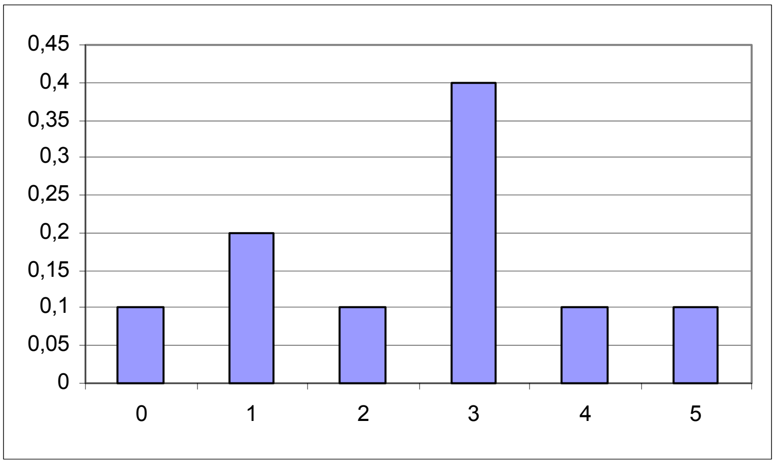
Distribució binomial

1. **X és una variable aleatòria discreta la funció de probabilitat de la qual és**

x	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
p	**0,1**	**0,2**	**0,1**	**0,4**	**0,1**	**0,1**

Representa gràficament la funció de probabilitat i calcula les probabilitat següents P(x<4,5), P(x≥3) i P(3≤x<4,5)

La gràfica de la funció és



$P(x < 4) = P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2) + P(x = 3) = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}4 = 0{,}8$

$P(x \geq 3) = P(x = 3) + P(x = 4) + P(x = 5) = 0{,}4 + 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}6$

$P(3 \leq x < 4{,}5) = P(x = 3) + P(x = 4) = 0{,}4 + 0{,}1 = 0{,}5$

2. **S'ha fet una prova de fluïdesa verbal a un grup nombrós de nens i nenes d'una comarca socialment deprimida i s'ha detectat que el 35% té una fluïdesa verbal pràcticament nul·la, mentre que la resta es pot considerar acceptable. D'una mostra aleatòria formada per set nens i nenes troba la mitjana i la variància i la funció de probabilitat**.

La mitjana d'una binomial és

$\overline{x} = np = 7 \cdot 0{,}35 = 2{,}45$

i la variancia

$s^2 = npq = 7 \cdot 0{,}35 \cdot 0{,}65 = 1{,}5925$

La funció de probabilitat segueix una binomial de paràmetres n=7, p=0,35 i q=0,65. La probabilitat que x=k serà

$$P(x = k) = \binom{7}{k} 0{,}35^k 0{,}65^{7-k}$$

3. **En una illa de cases hi ha deu aparcaments. A cada aparcament hi pot haver o no un cotxe, independentment que els altres aparcaments estiguin ocupats. Si la probabilitat que un aparcament estigui ocupat és 0,4, calcula la probabilitat que en un cert dia hi hagi vuit cotxes aparcats.**

n=10 p=0,4 i q=0,6. Hi ha 10 aparcaments que tenen probabilitat 0,4 d'estar ocupats i 0,6 de no estar ocupats. La probabilitat que en un dia hi hagi 8 cotxes aparcats és

$$P(k = 8) = \binom{10}{8} 0{,}4^8 0{,}6^2 = 0{,}0106$$

4. **Una enquesta revela que el 20% de la població està a favor d'un polític i que la resta hi està en contra. Si es trien sis persones a l'atzar, calcula les**

probabilitats que les sis persones estiguin a favor i que les sis estiguin en contra.

p=0,2 és la probabilitat que una persona estigui a favor i 0,8 la d'estar en contra. Les probabilitat demanades són

$$P(k=0)=\binom{6}{0}0{,}2^0 0{,}8^6 = 0{,}8^6 = 0{,}262144$$

$$P(k=6)=\binom{6}{6}0{,}2^6 0{,}8^0 = 0{,}2^6 = 0{,}000064$$

5. **Una raça determinada de gossos té quatre cadells per cada ventrada. Si la probabilitat que un cadell sigui mascle és 0,55, calcula les probabilitats que en una ventrada exactament dos cadells siguin femelles i que en una ventrada almenys dos cadells siguin femelles**

Sigui p=0,45 la probabilitat que un cadell sigui femella i q=0,55 que sigui mascle. Tenim una distribució binomial on n=4

$$P(k=2)=\binom{4}{2}0{,}45^2 0{,}55^2 = 0{,}36764$$

i la probabilitat que, almenys, dos cadells siguin femelles és

$$P(k\geq 2)=P(k=2)+P(k=3)+P(k=4)=\binom{4}{2}0{,}45^2 0{,}55^2 +$$

$$+\binom{4}{3}0{,}45^3 0{,}55+\binom{4}{4}0{,}45^4 = 0{,}609$$

6. **Un jugador de tennis té una probabilitat de guanyar un partit de 0,25. Si juga quatre partits, calcula la probabilitat que en guanyi més de la meitat.**

$$P(k>2)=P(k=3)+P(k=4)=\binom{4}{3}0{,}25^3 0{,}75+\binom{4}{4}0{,}25^4 = 0{,}0508$$

7. **Si el 20% dels panys produïts per una màquina són defectuosos, determina la probabilitat que de quatre panys agafats a l'atzar un sigui defectuós i que com a màxim dos siguin defectuosos.**

La probabilitat que un sigui defectuós, on n=4 p=0,2 i q=0,8 és

$$P(k=1)=\binom{4}{1}0{,}2^1 0{,}8^3 = 0{,}4096$$

La probabilitat que, com màxim, dos siguin defectuosos és

$$P(k\leq 2)=P(k=0)+P(k=1)+P(k=2)=$$

$$\binom{4}{0}0{,}8^4+\binom{4}{1}0{,}2^1 0{,}8^3+\binom{4}{2}0{,}2^2 0{,}8^2 = 0{,}9728$$

8. **Si llancem una moneda quatre vegades, quina és la probabilitat que surtin més cares que creus?**

És una distribució binomial de n=4 i p=q=0,4. La probabilitat d'obtenir més cares que creus és la de

$$P(k>2)=P(k=3)+P(k=4)=\binom{4}{3}0{,}5^3 0{,}5+\binom{4}{4}0{,}5^4 = 0{,}3125$$

Hi ha una segona manera de fer-ho. Calculem la probabilitat d'obtenir 2 cares i dues creus

$$P(k=2)=\binom{4}{2}0{,}5^2 0{,}5^2 = 0{,}375$$

Per la simetria té la mateixa probabilitat obtenir més cares que creus que més creus que cares. Si P és aquesta probabilitat ha de verificar que

$$2P + 0{,}375 = 1 \quad \Rightarrow P = \frac{1-0{,}375}{2} = 0{,}3125$$

9. Llancem set vegades una moneda trucada amb la qual la probabilitat de cara és 0,45. Calcula les probabilitat de que surtin exactament tres cares, que surtin almenys tres cares i que surtin com a màxim tres cares.

La distribució és binomial de n=7 p=0,45 i q=0,55. La probabilitat d'obtenir tres cares és

$$P(k=3)=\binom{7}{3}0{,}45^3 0{,}55^4 = 0{,}29185$$

La de treure, almenys, 3 cares

$$P(k \geq 3) = P(k=3) + P(k=4) + P(k=5) + P(k=6) + P(k=7) =$$

$$\binom{7}{3}0{,}45^3 0{,}55^4 + \binom{7}{4}0{,}45^4 0{,}55^3 + \binom{7}{5}0{,}45^5 0{,}55^2 + \binom{7}{6}0{,}45^6 0{,}55 + \binom{7}{7}0{,}45^7 =$$

$$= 0{,}683559$$

La de treure, com a màxim, tres cares

$$P(k \leq 3) = P(k=0) + P(k=1) + P(k=2) + P(k=3) =$$

$$\binom{7}{0}0{,}55^7 + \binom{7}{1}0{,}45 \cdot 0{,}55^6 + \binom{7}{2}0{,}45^2 0{,}55^5 + \binom{7}{3}0{,}45^3 0{,}55^4 =$$

$$= 0{,}60829$$

10. Un examen consta de nou preguntes de quatre possibles respostes cada una, de les quals només una és correcta. Si suposem que un estudiant que fa l'examen respon les preguntes a l'atzar, quina és la probabilitat que contesti correctament sis preguntes? i que no n'encerti cap?

La probabilitat d'encertar, a l'atzar, una pregunta és 0,25 donat que hi ha quatre opcions en cada una. La probabilitat que l'alumne contesti correctament sis de les nou preguntes és

$$P(k=6)=\binom{9}{6}0{,}25^6 0{,}75^3 = 0{,}00865$$

La probabilitat de no encertar-ne cap

$$P(k=0)=\binom{9}{0}0{,}75^9 = 0{,}07508$$

11. **Una família té deu fills i la distribució per sexes és igualment probable. Calcules les probabilitats que a) com a màxim hi hagi tres nenes. b) que almenys hi hagi una nena. c) que hi hagi vuit nens. d) que hi hagi com a mínim una nena i un nen**.

La probabilitat que hi hagi, com màxim, tres nenes és

$P(k \le 3) = P(k=0) + P(k=1) + P(k=2) + P(k=3) =$

$= \binom{10}{0} 0{,}5^{10} + \binom{10}{1} 0{,}5 \cdot 0{,}5^{9} + \binom{10}{2} 0{,}5^{2} 0{,}5^{8} + \binom{10}{3} 0{,}5^{3} 0{,}5^{7} =$

$= 0{,}00098 + 0{,}00977 + 0{,}04395 + 0{,}11719 = 0{,}17189$

La probabilitat que almenys hi hagi una nena

$P(k \ge 1) = 1 - P(k < 1) = 1 - P(k=0) = 1 - \binom{10}{0} 0{,}5^{10} =$

$= 1 - 0{,}00098 = 0{,}99902$

on hem fet servir l'esdeveniment complementari. La probabilitat que hi hagi vuit nens és

$P(k=8) = \binom{10}{8} 0{,}5^{8} 0{,}5^{2} = 0{,}024414$

Per calcular la probabilitat que hi hagi com a mínim una nena i un nen considerem que aquest és l'esdeveniment contrari de "tots 10 nens" o "tots 10 nenes". La probabilitat de tots deu d'un sexe és

$P(k=0) = P(k=10) = \binom{10}{0} 0{,}5^{10} = 0{,}0009765$

Aleshores la probabilitat demanada és

$P = 1 - 2 \cdot 0{,}0009765 = 0{,}998047$

12. En un joc determinat guanya qui, en llançar dos daus, obté com a suma de les cares superiors 10 punts o més. Si el jugador tira el dau 12 vegades calcula les probabilitats que guanyi exactament tres vegades, que perdi les 12 vegades.

L'espai d'esdeveniments del llançament de dos daus està format per 36 esdeveniments elementals, dels quals n'hi ha 6 que són favorables a "la suma és 10 o més". La probabilitat de guanyar és, aleshores, $p = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

La probabilitat de guanyar tres vegades en 12 llançaments de dos daus és

$P(k=3) = \binom{12}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^{3} \left(\frac{5}{6}\right)^{9} = 0{,}1974$

i la de no guanyar-ne cap

$P(k=0) = \binom{12}{0} \left(\frac{5}{6}\right)^{12} = 0{,}11216$