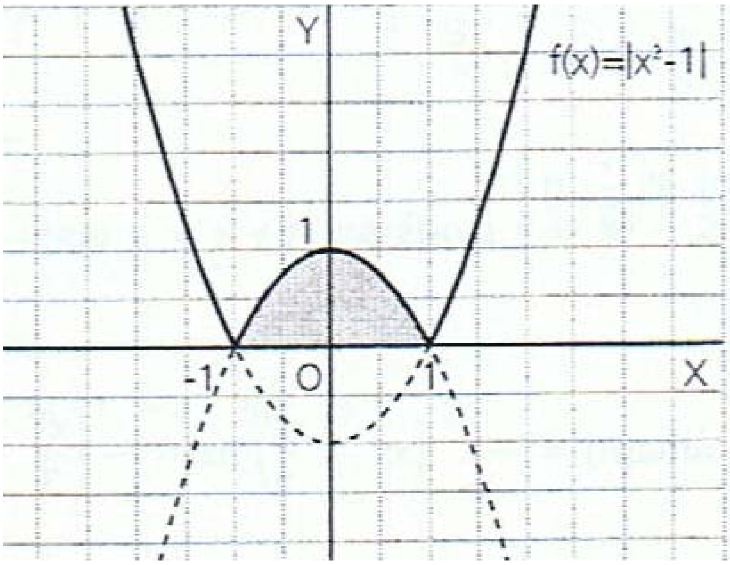
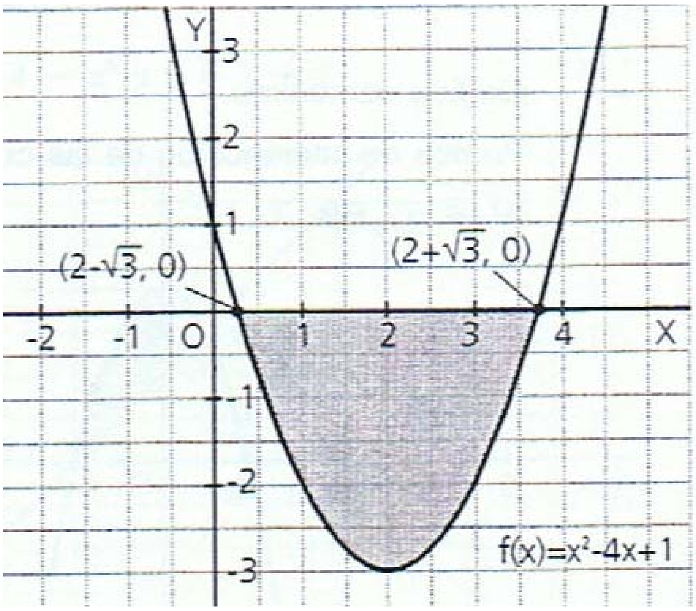
1. Representa la funció $f(x)=\left|x^2-1\right|$ i calcula l'àrea de la regió tancada per la corba i les rectes x=-1 i x=1



Fent servir la simetria de la gràfica

$$A=2\int_0^1(1-x^2)dx=2\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{4}{3}$$

2. Calcula l'àrea limitada per l'eix OX i la gràfica de la funció $f(x)=x^2-4x+1$. Fes un esbós



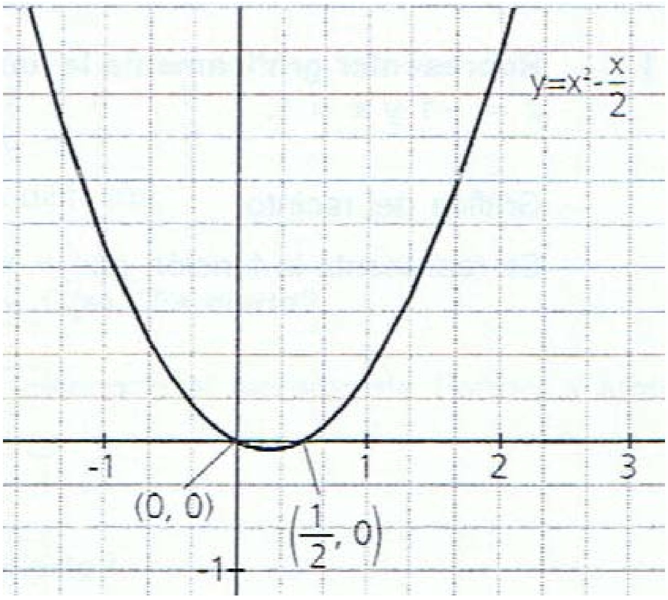
La funció $f(x)=x^2-4x+1$ talla l'eix OX en els punts que verifiquen

$$x^2-4x+1=0\Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{12}}{2}=\frac{4\pm2\sqrt{3}}{2}=2\pm\sqrt{3}$$

i a l'interval la funció té imatges negatives. Hem de calcular

$$A=-\int_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}}(x^2-4x+1)dx=-\left[\frac{x^3}{3}-\frac{4x^2}{2}+x\right]_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}}=4\sqrt{3}$$

3. Sabem que una funció polinómica de segon grau passa pels punts A(0,0) y B(2,3) i que assoleix un mínim en el punt d'abscissa $\frac{1}{4}$. Calculeu l'equació de la funció, les interseccions amb els eixos i l'àrea del recinte limitat per la funció i l'eix d'abscisses.



En primer lloc hem de calcular l'expressió de la funció polinómica. Sigui de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, sabem que passa per (0,0) i per (2,3) i podem escriure les imatges de 0 i de 2

$0 = c$

$3 = 4a + 2b + c$

A més a més quan $x = \frac{1}{4}$ la derivada de la funció ha de ser zero, ja que té un mínim en aquest punt

$$f'(x) = 2ax + b \quad \Rightarrow f'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{a}{2} + b = 0$$

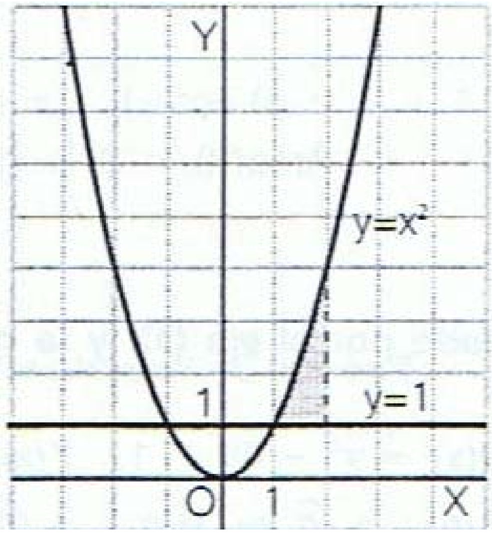
Resolem el sistema format per les tres equacions i obtenim el valors dels coeficients a, b i c

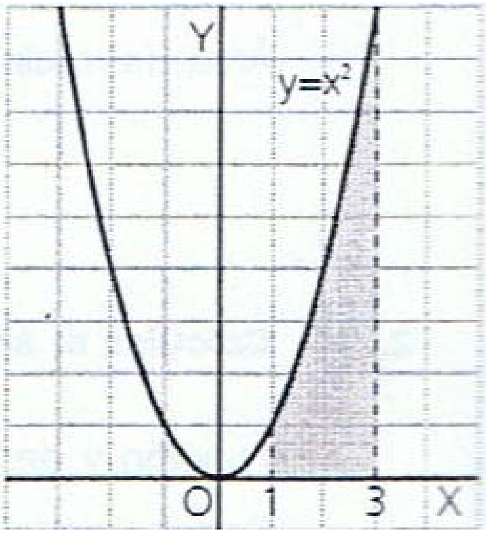
$$\begin{cases} c = 0 \\ 4a + 2b + c = 3 \\ \frac{a}{2} + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a = 1 \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = 0 \end{matrix}$$

La funció polinómica és, aleshores $f(x) = x^2 - \frac{1}{2}x$ que talla l'eix OX en els punts $x = 0$ i $x = \frac{1}{2}$. L'àrea que hem de calcular és

$$A = -\int_0^{\frac{1}{2}} \left(x^2 - \frac{1}{2}x\right) dx = -\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{4}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{48}$$

4. Calcular l'àrea de cada una de les parts ombrejades





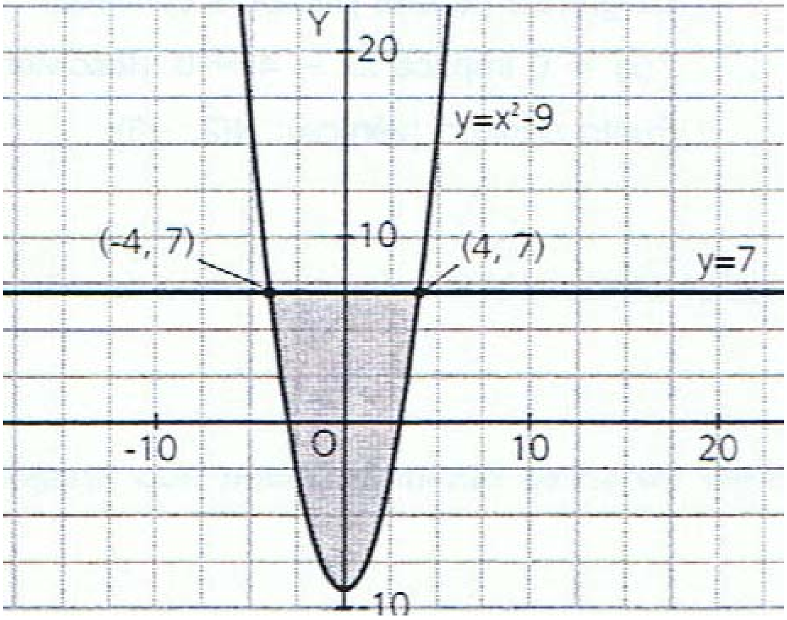
La primera part és

$$A = \int_1^2 \left(x^2 - 1\right)dx = \left.\frac{x^3}{3} - x\right]_1^2 = \frac{4}{3}$$

I la segona

$$A = \int_1^3 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \frac{26}{3}$$

5. Calcular l'àrea del recinte limitat per les gràfiques de $f(x) = x^2 - 9$ i $f(x) = 7$



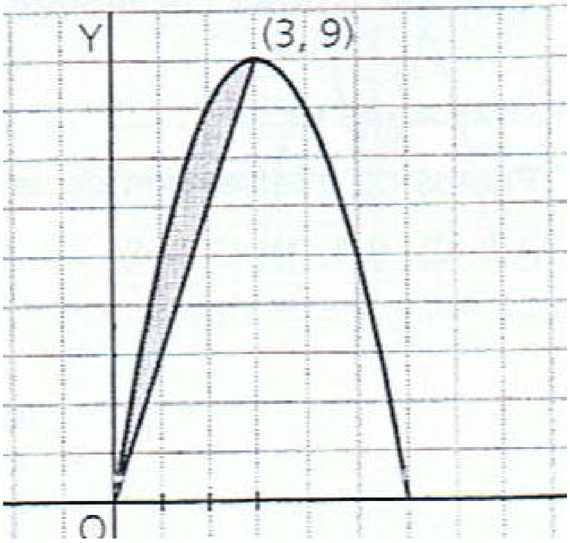
La recta i la paràbola es tallen en els punts

$x^2 - 9 = 7 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$

I la paràbola té, en aquest interval, imatges menors que la recta. Plantegem

$$\int_{-4}^{4} \left(7 - (x^2 - 9)\right)dx = \int_{-4}^{4} (16 - x^2)dx = 2\int_0^4 (16 - x^2)dx = 2\left[16x - \frac{x^3}{3}\right]_0^4 = \frac{256}{3}$$

6. La gràfica següent representa una funció polinómica de grau dos amb un màxim relatiu a (3,9). Determina l'expressió de la funció i calcula l'àrea del recinte ombrejat



De la gràfica sabem que f(0)=0, f(3)=9 i que f'(3)=0, la derivada de la funció en el punt x=3 ha de ser zero al ser aquest punt un màxim relatiu.

Si la funció és, en general, $f(x) = ax^2 + bx + c$, i la derivada $f'(x) = 2ax + b$ podem plantejar

$$\begin{cases} c = 0 \\ 9a + 3b + c = 9 \\ 6a + b = 0 \end{cases}$$

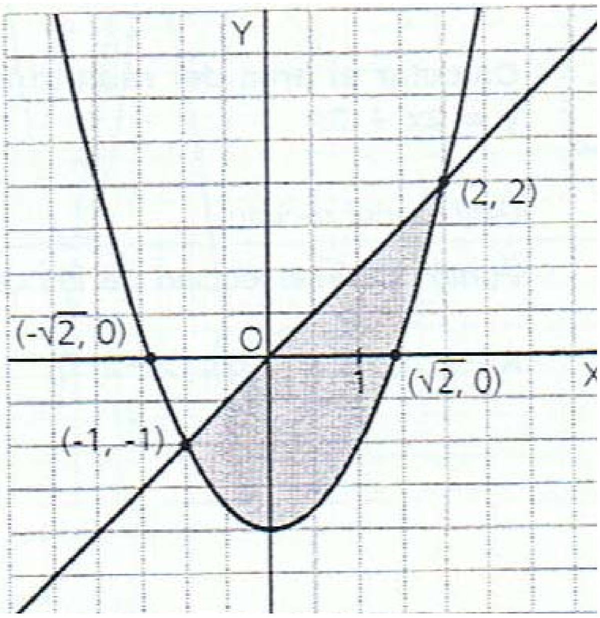
Si resolem aquest sistema obtenim a=-1, b=6 i c=0. La funció és $f(x) = -x^2 + 6x$

La recta passa per (0,0) i (3,9), la seva equació és $y = 3x$

L'àrea demanada és

$$A = \int_0^3 (-x^2 + 6x - 3x)dx = \int_0^3 (-x^2 + 3x)dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\Big]_0^3 = \frac{9}{2}$$

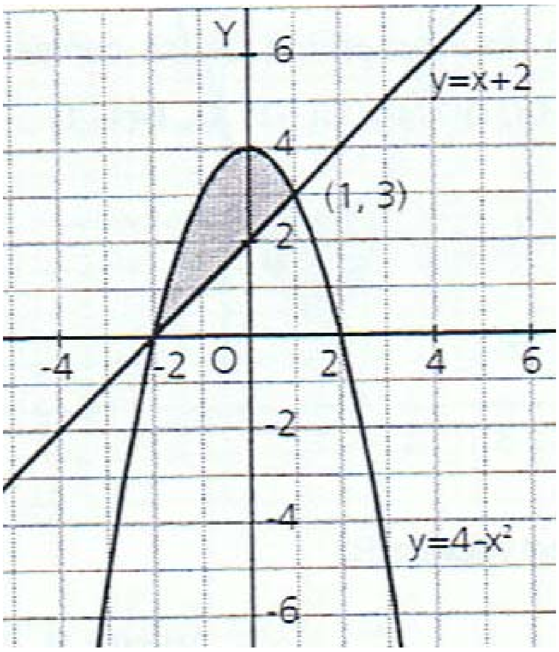
7. Trobeu l'àrea entre la recta $y = x$ i la paràbola $y = x^2 - 2$



Els punts d'intersecció són la solució del sistema format per les equacions de recta i paràbola. Són els punts x=-1 i x=2
Hem de calcular

$$A=\int_{-1}^{2}(x-(x^2-2))dx=\int_{-1}^{2}(x-x^2+2)dx=\left.\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+2x\right]_{-1}^{2}=\frac{9}{2}$$

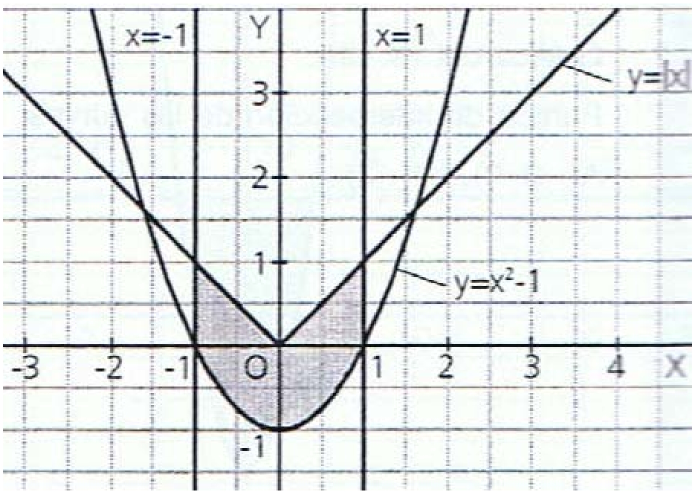
8. Trobeu l'àrea del recinte limitat per les gràfiques de les funcions $y=4-x^2$ i $y=x+2$



Les dues funcions es tallen en els punts x=-2 i x=1. Hem de calcular

$$A=\int_{-2}^{1}(4-x^2-(x+2))dx=\int_{-2}^{1}(-x^2-x+2)dx=\left.-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-2}^{1}=\frac{9}{2}$$

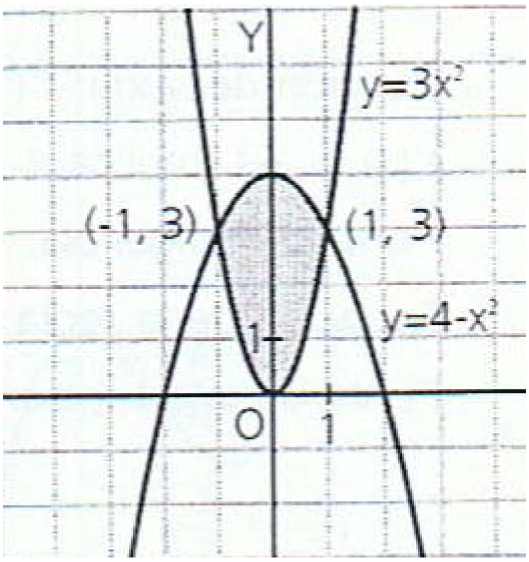
11. Calculeu l'àrea de la regió limitada per les corbes $y=|x|$ i $y=x^2-1$ i les rectes x=-1 i x=1



Els punts d'intersecció són x=-1 i x=1. Si fem servir la simetria de la gràfica

$$A=2\int_{0}^{1}(x-(x^2-1))dx=2\int_{0}^{1}(-x^2+x+1)dx=2\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right]_{0}^{1}=\frac{7}{3}$$

12. Trobeu l'àrea de la regió limitada per les corbes $f(x) = 4 - x^2$ **i** $g(x) = 3x^2$



Calculem els punts de tall de les dues funcions resolent el sistema

$$\begin{cases} y = 4 - x^2 \\ y = 3x^2 \end{cases}$$

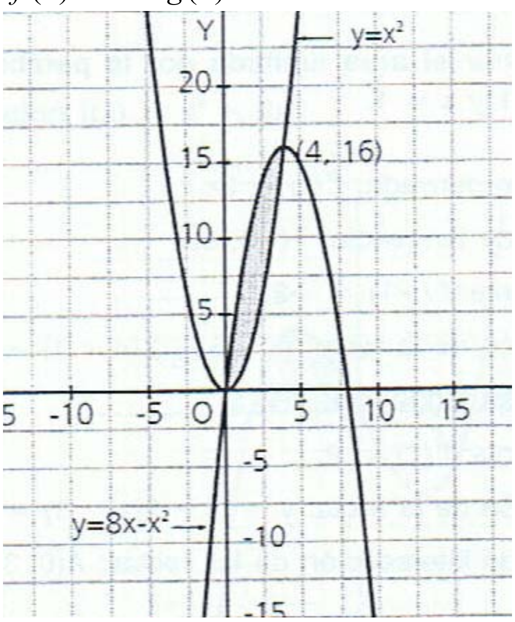
Les solucions són x=-1 i x=1. A l'interval (-1,1) la funció $y = 4 - x^2$ té imatges superiors a $y = x^2$. Hem de plantejar

$$\int_{-1}^{1} ((4 - x^2) - x^2) dx = \int_{-1}^{1} (4 - 2x^2) dx = 4x - \frac{2x^3}{3} \Bigg]_{-1}^{1} = \frac{16}{3}$$

Si aprofitem la simetria de la regió és el mateix que

$$A = 2\int_{0}^{1} (4 - 2x^2) dx$$

13. Calculeu l'àrea del recinte finit limitat per les gràfiques de les funcions $f(x) = x^2$ **i** $g(x) = 8x - x^2$



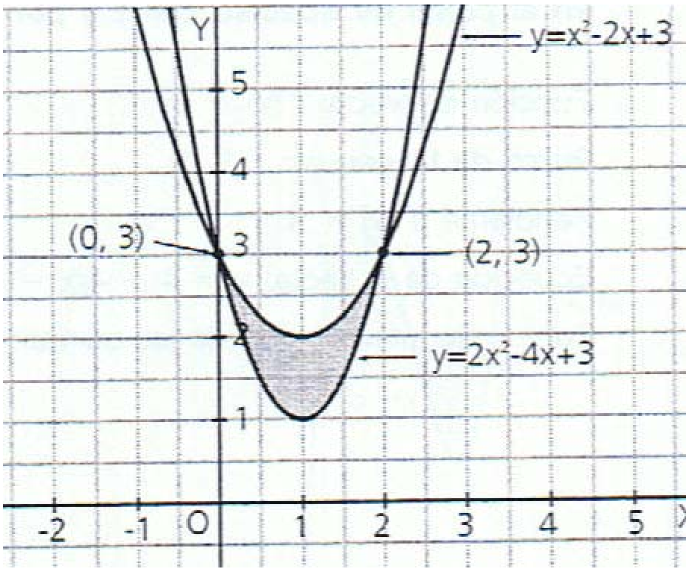
Calculem els límits del recinte resolent el sistema format per les dues funcions

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 8x - x^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 = 8x - x^2 \quad \Rightarrow 2x^2 = 8x \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ 4 \end{cases}$$

A l'interval (0,4) les funcions no tenen imatges negatives i $8x - x^2 > x^2$. Hem de calcular

$$\int_0^4 \left(\left(8x - x^2\right) - x^2\right)dx = \int_0^4 (8x - 2x^2)dx = \left.\frac{8x^2}{2} - \frac{2x^3}{3}\right]_0^4 = \frac{64}{3}$$

14. Calculeu l'àrea compresa entre les paràboles $y = x^2 - 2x + 3$ i $y = 2x^2 - 4x + 3$



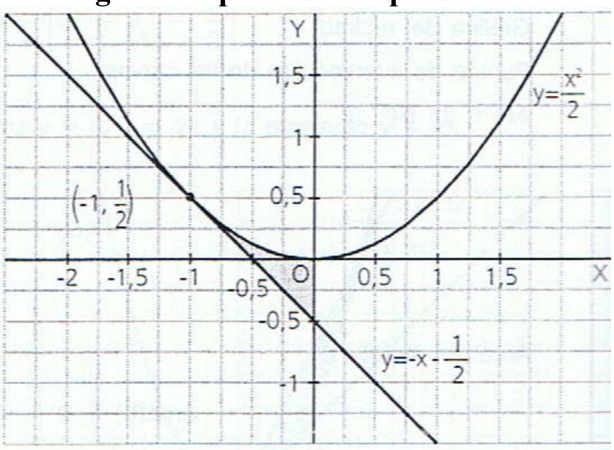
Les dues paràboles són còncaves i tenen imatges sempre positives. Es tallen en els punts que són la solució del sistema

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x + 3 \\ y = 2x^2 - 4x + 3 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2x + 3 = 2x^2 - 4x + 3 \quad \Rightarrow 0 = x^2 - 2x$$

Les solucions són x=0 i x=2. La funció $y = 2x^2 - 4x + 3$ té imatges menors que l'altra a l'interval (0,2). Hem de calcular

$$\int_0^2 \left(\left(x^2 - 2x + 3\right) - \left(2x^2 - 4x + 3\right)\right)dx = \int_0^2 \left(-x^2 + 2x\right)dx = \left.-\frac{x^3}{3} + x^2\right]_0^2 = \frac{4}{3}$$

15. Calcula l'àrea del recinte limitat per la paràbola $x^2 = 2y$, l'eix d'ordenades i la tangent a la paràbola de pendent –1. Feu un esbós del recinte



La funció derivada és $f'(x) = x$, un pendent –1 s'assoleix en el punt x=-1

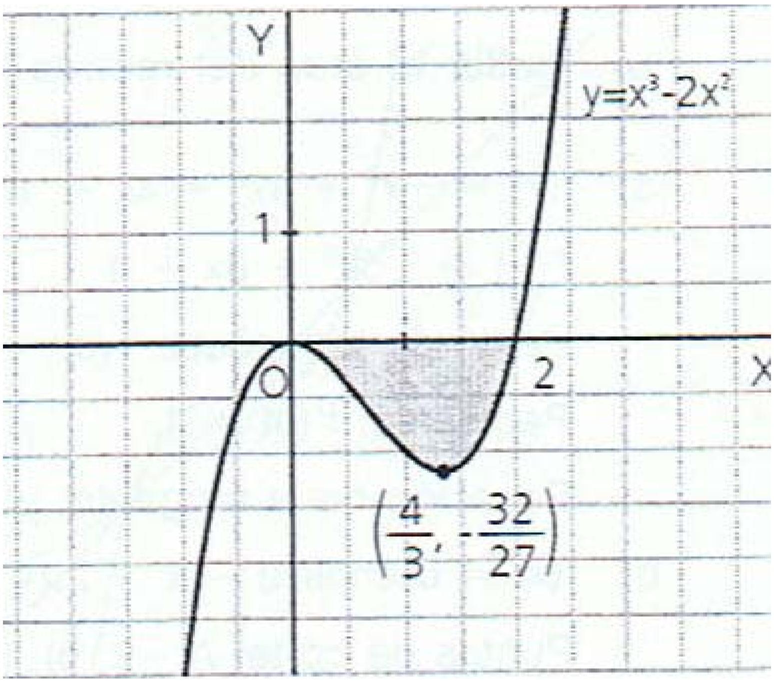
la recta tangent passa per $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$. La recta que passa per aquest punt de pendent –1 és

$$y = -x - \frac{1}{2}$$

L'àrea demanada és

$$A = \int_{-1}^{0} \left(\frac{x^2}{2} - \left(-x - \frac{1}{2} \right) \right) dx = \left. \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} \right]_{-1}^{0} = \frac{1}{6}$$

18. Trobeu l'àrea de la regió limitada per l'eix d'abscisses i la corba $y = x^3 - 2x^2$. Feu un esbós



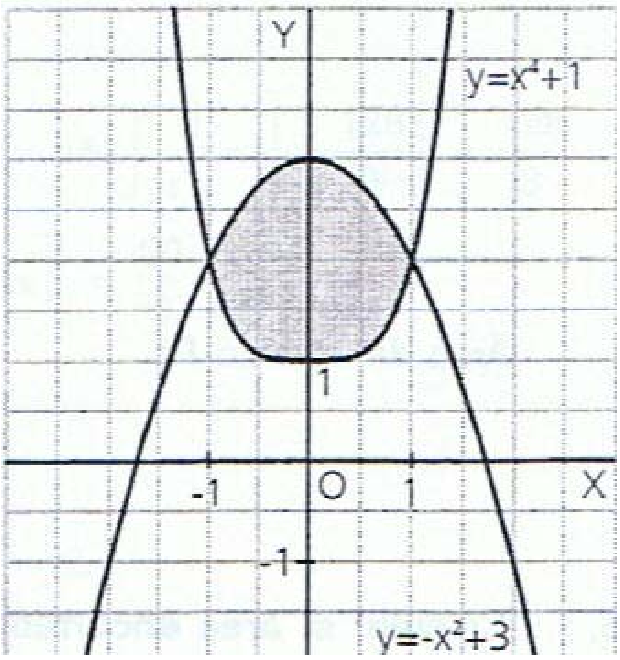
La corba talla l'eix OX en els punts

$$x^3 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x-2) = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases}$$

A l'interval (0,2) les imatges són negatives. L'àrea de la zona serà

$$A = -\int_0^2 (x^3 - 2x^2) dx = -\left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{4}{3}$$

27. Calculeu l'àrea limitada per les corbes $y = x^4 + 1$ **i** $y = -x^2 + 3$



Calculem els punts on es tallen les corbes resolent el sistema

$$\begin{cases} y = x^4 + 1 \\ y = -x^2 + 3 \end{cases} \Rightarrow x^4 + x^2 - 2 = 0$$

Aquest polinomi de quart grau es resol fent $x^2 = t$ i resolent $t^2 + t - 2 = 0$, les seves solucions són

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

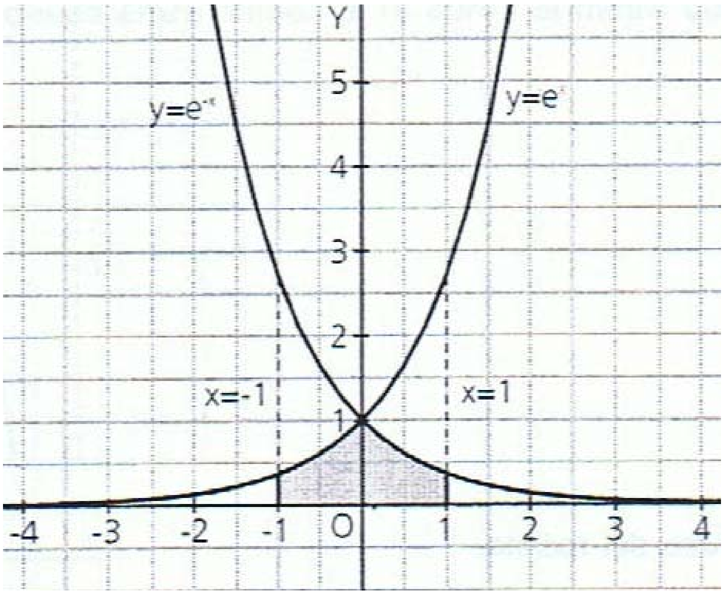
Si t=1, serà $x = \sqrt{t} = \sqrt{1} = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$

Les funcions es tallen en els punts x=-1 i x=1. La funció $y = -x^2 + 3$ té imatges més petites que la primera. Hem de plantejar

$$\int_{-1}^{1} (-x^2 + 3) - (x^4 + 1)dx = 2\int_{0}^{1} (-x^2 - x^4 + 2)dx = 2\left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + 2x \right]_0^1 = \frac{44}{15}$$

30. Trobeu l'àrea del recinte limitat per $y = e^x$, $y = e^{-x}$, x=1, x=-1 i l'eix OX

La gràfica de la funció és



Podem fer servir la simetria i calcular només l'àrea de l'interval [0,1]

$$A = 2\int_{o}^{1} e^{x}\,dx = 2e^{x}\Big]_0^1 = 2(e-1)$$