2. Donades les matrius $A=\begin{pmatrix}2&0&1\\3&0&0\\5&1&1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&2&1\\1&1&0\end{pmatrix}$**, calcula A+B, A-B, AB, BA, AA i BB**

$$A+B=\begin{pmatrix}2&0&1\\3&0&0\\5&1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&1\\1&2&1\\1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0&2\\4&2&1\\6&2&1\end{pmatrix}$$

$$A-B=\begin{pmatrix}2&0&1\\3&0&0\\5&1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&1\\1&2&1\\1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-2&-1\\4&0&1\end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix}2&0&1\\3&0&0\\5&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&1\\1&2&1\\1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1&2\\3&0&3\\7&6&3\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&2&1\\1&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&0&1\\3&0&0\\5&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&1&2\\13&1&2\\5&0&1\end{pmatrix}$$

$$AA=\begin{pmatrix}2&0&1\\3&0&0\\5&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&0&1\\3&0&0\\5&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&1&3\\6&0&3\\18&1&6\end{pmatrix}$$

$$BB=\begin{pmatrix}2&0&1\\3&0&0\\5&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&1\\1&2&1\\1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&1\\4&5&3\\2&2&2\end{pmatrix}$$

4. Es consideren les matrius $A=\begin{pmatrix}1&0&3\\2&-1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1\\-2&-3\\0&4\end{pmatrix}$ **i**

$C=\begin{pmatrix}2&1&4\\3&0&-1\\4&-1&5\end{pmatrix}$**, calcula** $3A,\ 3A+2C,\ AC,\ CA,\ AB$

$$3A=3\begin{pmatrix}1&0&3\\2&-1&2\\2&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0&9\\6&-3&6\\6&6&3\end{pmatrix}$$

$$3A+2C=\begin{pmatrix}3&0&9\\6&-3&6\\6&6&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&2&8\\6&0&-2\\8&-2&10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&2&17\\12&-3&4\\14&4&13\end{pmatrix}$$

$$AC=\begin{pmatrix}1&0&3\\2&-1&2\\2&2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1&4\\3&0&-1\\4&-1&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14&-2&19\\9&0&19\\14&1&11\end{pmatrix}$$

$$CA=\begin{pmatrix}2&1&4\\3&0&-1\\4&-1&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&3\\2&-1&2\\2&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12&7&12\\1&-2&8\\12&11&15\end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix}1&0&3\\2&-1&2\\2&2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\-2&-3\\0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&13\\4&13\\-2&0\end{pmatrix}$$

5. Calcula A^2-3A-I si $A=\begin{pmatrix}2&3\\1&1\end{pmatrix}$ $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$$A^2-3A-I=\begin{pmatrix}2&3\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&3\\1&1\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}2&3\\1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&9\\3&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6&9\\3&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

8. Resol aquesta equació matricial

$$\begin{pmatrix}1&-1\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&x\\y&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$$

Efectuant el producte de matrius obtenim

$$\begin{pmatrix}x-y\\3x+2y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+2x\\3y-2\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\begin{cases}x-y=3+2x\\3x+2y=3y-2\end{cases}$$

i si resolem el sistema obtenim

$$x=-\frac{5}{4},\quad y=-\frac{7}{4}$$

9. Si tenim la matriu A següent $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$, mostra que la inversa de A^n és. precisament, $\begin{pmatrix}1&-n\\0&1\end{pmatrix}$

Calculem primer A^n

$$A^2=AA=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}$$

i, en general, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Comprovem que

$$A^n \cdot \left(A^n\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

13. Busca les matrius simètriques d'ordre 2, de manera que $A^2 = A$

Sigui la matriu $A = \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}$ una matriu simètrica que verifiqui

$$A^2 = \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 & xy + yz \\ xy + yz & y^2 + z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}$$

Aleshores ha de complir

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = x \\ xy + yz = y \\ y^2 + z^2 = z \end{cases}$$

Si resolem en funció de x obtenim

$z = 1 - x \quad y = \sqrt{x - x^2}$

la matriu buscada serà de la forma

$$\begin{pmatrix} x & \sqrt{x - x^2} \\ \sqrt{x - x^2} & 1 - x \end{pmatrix}$$

17. Calcula, per inducció respecte a n

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n$$

Obtenim

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$A^4 = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$ i, en general, $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$

Operant de la mateixa manera amb la segona matriu obtenim

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i en general $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \dfrac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

20. Calcula el rang de la matriu $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

Les files no son proporcionals, el rang de la matriu és 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

21. Calcula el rang de la matriu $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 7 & 7 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 7 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -7 & -14 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El rang de la matriu és 2