1. **Escriviu el sistema** $\begin{cases} x = 2y \\ 2x + y = 20 \end{cases}$ **en forma de matrius. Resoleu calculant la matriu inversa de la matriu de coeficients**

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Calculem la matriu inversa de la matriu de coeficients

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{t} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

multipliquem per l'esquerra

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 20 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 40 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

2. **Donades les matrius** $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ **i** $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$**, calculeu** $A \cdot B$ **i** $B \cdot A$ **i comproveu que** $(A+B)^2 = A^2 + B^2$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Observem que $AB = -BA$

Aleshores

$$(A+B)^2 = A^2 + B^2 + AB + BA = A^2 + B^2$$

3. **Donades les matrius** $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **i** $B = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$**, on a i b són nombres reals, trobeu els valors de a i b que fan que les matrius commutin, és a dir, que** $A \cdot B = B \cdot A$

Calculem els productes i igualem els resultats

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aleshores ha de ser $a + b = a + b$. Les matrius commuten per a tots els valors de a i de b

4. **Resoleu el sistema** $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + z = 1 \\ y - z = 0 \end{cases}$

Podem fer-ho de moltes maneres. Per Gauss-Jordan

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

d'on obtenim x=-1, y=2 i z=2. Si resolem calculant la matriu inversa de la matriu de coeficients

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^t =$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Multipliquem per l’esquerra per la matriu inversa i obtenim

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

5. **Calculeu el rang de la matriu** $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ a & -2 & -a \\ 1 & a & a+1 \end{pmatrix}$ **segons els valors de a**

Apliquem el mètode de Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ a & -2 & -a \\ 1 & a & a+1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & a+2 & 3a \\ 0 & 1-a & 1-a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 6a-6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

el rang és 3 quan $6a-6 \neq 0 \Rightarrow a \neq 1$, i és 2 quan $6a-6=0 \Rightarrow a=1$

6. **Comproveu si en la matriu** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ **hi ha una combinació lineal. Si existeix, calculeu-la**

Apliquem el mètode de Gauss anotant les operacions que fem

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} F1 \\ 4F1-F2 \\ 7F1-F3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 6 & 12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} F1 \\ 4F1-F2 \\ 2(4F1-F2)-(7F1-F3) \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

igualem a zero la última operació de fila

$2(4F1-F2)-(7F1-F3)=0 \Rightarrow 8F1-2F2-7F1+F3=0 \Rightarrow F1-2F2+F3=0$

Aquesta combinació lineal la podem escriure de diferents maneres, per exemple

$F1=2F2-F3$

7. **Donades les matrius** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ **i** $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$**, trobeu una matriu X que verifiqui** $A \cdot X + A = B$

El sistema es resol fent

$$A\cdot X + A = B \Rightarrow AX = B - A \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}(B-A) \Rightarrow X = A^{-1}(B-A)$$

La matriu inversa de A és

$$A^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B - A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i la matriu X

$$X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

8. Sigui la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -m \\ 0 & m & 3 \end{pmatrix}$. Calculeu el rang de A segons els valors de m

Apliquem el mètode de Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -m \\ 0 & m & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & m-4 \\ 0 & m & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & m-4 \\ 0 & 0 & m(m-4)+3 \end{pmatrix}$$

Resolem

$$m(m-4)+3 = 0 \Rightarrow m^2 - 4m + 3 = 0 \Rightarrow m = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$$

Si m=1 o m=4 el rang de la matriu serà 2. Per a altres valors de m el rang és 3

9. Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, trobeu una matriu X que verifiqui $A\cdot X = B$. Calculeu B^{100}

Calculem la matriu inversa de A

$$A^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Aleshores la matriu X és

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = B^2 B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

i, en general,

$$B^{100} = \begin{pmatrix} 2^{99} & 2^{99} \\ 2^{99} & 2^{99} \end{pmatrix}$$

10. Demostreu que un determinant d'ordre 4 triangular superior és el producte dels termes de la diagonal principal. Demostreu que també és cert si té ordre n qualsevol.

El determinant és de la forma

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}$$

Si el desenvolupem per la primera columna, que només té un terme diferent de 0, obtenim

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}$$

si el determinant d'orde 3 el desenvolupem també per la primera columna i així successivament

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$$

11. Resoleu l'equació $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ x & -1 & x \end{vmatrix} = 0$

Calculem el determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ x & -1 & x \end{vmatrix} = x^2 + 2x + 1 = 0$$

equació que si resolem obtenim $x = -1$

12. Resoleu $\begin{cases} 2x + 3z = 4 + y \\ x + y = 1 + 5z \\ x - y - z = 0 \end{cases}$

Apliquem el mètode de Gauss-Jordan, canviem l'ordre de les equacions, i obtenim

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -5 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 14 & 7 \end{pmatrix}$$

Si dividim per 7 la tercera fila i continuem obtenint la diagonal

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

obtenim les solucions del sistema