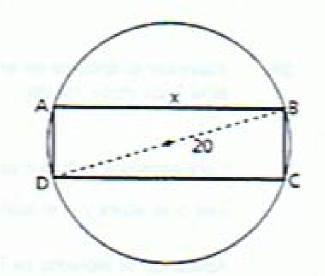
1. **Volem construir un pou de forma cilíndrica de 2 m de diàmetre. Expressa el volum de l'aigua que cap en el pou en funció de la seva profunditat x**

El radi és de 1 m i el volum del cilindre
$V = \pi\, r^2 h$ en funció de l'altura x $V = \pi\, x$

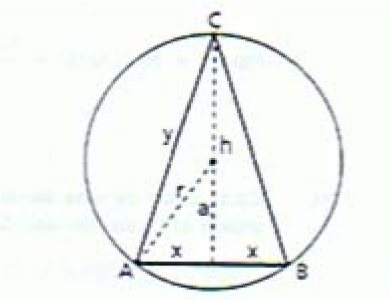
2. **El radi d'un cercle fa 10 cm. Expressa l'àrea d'un rectangle que s'hi troba inscrit en funció de la mesura x de la base. Quin n'és el domini?**

El diàmetre del cercle és de 20 cm i si x és la base i y l'altura es compleix



$20^2 = x^2 + y^2$, d'on l'altura y serà $y = \sqrt{400 - x^2}$
i l'àrea del rectangle $A = x\sqrt{400 - x^2}$
La funció té sentit quan $0 \le x \le 20$, el domini de la funció és [0,20]

3. **El radi d'un cercle fa 10 cm. Expressa l'àrea d'un triangle que s'hi troba inscrit en funció de la mesura x de la semibase. Quin n'és el domini?**



En el dibuix apliquem el teorema de Pitàgores i obtenim $x^2 + a^2 = 100$, d'on $a = \sqrt{100 - x^2}$. L'altura del triangle serà $r + a$ i la base $2x$. Aleshores l'àrea del triangle

$$A = \frac{2x\left(10 + \sqrt{100 - x^2}\right)}{2} = x\left(10 + \sqrt{100 - x^2}\right)$$

el domini de la funció és [0,10]

4. **En un bloc de pisos les finestres són rectangulars i han de fer 2 m^2 de claror. Si x és la longitud del costat de la base, busca el perímetre en funció de x. Quin n'és el domini?**

L'àrea és $2 = xy \Rightarrow y = \dfrac{2}{x}$

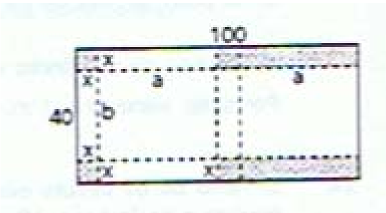
i el perímetre $P = 2x + \frac{4}{x}$. El domini de la funció són els reals positius

5. **Un rectangle fa 40 m de perímetre. Expressa l'altura del rectangle en funció del costat x de la base i fes el mateix per l'àrea. Quin n'és el domini?**

Si x i y són les dimensions del rectangle és $2x + 2y = 40 \quad \Rightarrow x + y = 20$. L'altura y en funció de la base x és $y = 20 - x$, l'àrea és $A = x(20 - x)$

EL domini de la funció és [0,20]

6. **Disposem d'una cartolina de 100 per 40 cm i volem construir una caixa amb tapa tallant un quadrat en dos dels angles i dos rectangles en els altres dos angles. Busca l'expressió del volum en funció del costat x del quadrat**

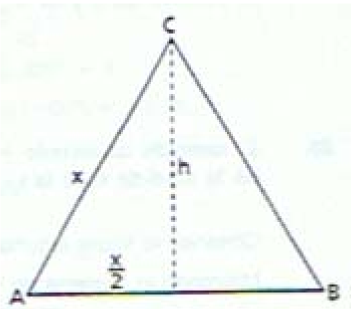


El volum de la capsa serà $V = abx$

i les distàncies a i b son $b = 40 - 2x \quad ; a = \frac{100 - 2x}{2} = 50 - x$

aleshores el volum $v = (50 - x)(40 - 2x)x$

7. **Expressa l'àrea del triangle equilàter en funció del costat que mesura x. Busca el valor d'aquesta funció si el costa fa 10 cm**



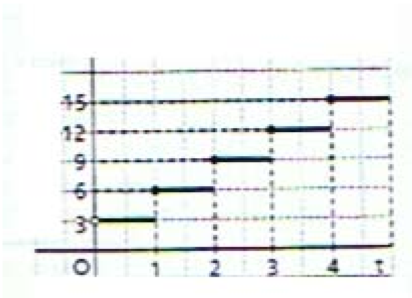
L'altura es pot calcular fent servir el teorema de Pitàgores $h = \sqrt{x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{x\sqrt{3}}{2}$

i l'àrea del triangle

$A = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$

Si x=10 l'àrea serà $A = 25\sqrt{3}$

8. **Cada pas d'una trucada telefònica costa 3 cèntims i cada cèntim dura un minut. Dibuixa la gràfica que indica el cost d'una trucada de 5 minuts..**



9. **S'ha fet un estudi de mercat en què la corba d'oferta d'un producte determinat ve donada per la funció $y = 0{,}7x + 8$ i la corba de demanda per $y = 1{,}3x - 4$. S' el punt de tall d'ambdues corbes és el punt d'equilibri a què s'acosta el mercat, busca aquest punt.**

S'ha de resoldre el sistema format per les equacions $\begin{cases} y = 1{,}3x - 4 \\ y = 0{,}7x + 8 \end{cases}$. Obtenim com resultats x=20 i y=22

10. **Una indústria automobilística va tenir una producció de 50.000 cotxes l'any 1995 i de 80.000 l'any 2001. Busca la funció que representa el nombre de cotxes fabricats en funció del temps si suposem que la seva gràfica és una recta. Què representa el pendent?. Si la demanda d'aquest tipus de cotxes durant aquests anys va ser de 72.000 i 90.000 respectivament, quan s'espera que s'equilibri l'oferta i la demanda. (Hem de tornar a suposar que la demanda s'expressa per mitjà d'una recta)**

Considerem 0 l'any 1995, La funció que dóna la producció de cotxes ha de passar pels punts (0,50.000) i (6,80.000). Si és una funció lineal del tipus $y = ax + b$ calculem a i b resolent

$\begin{cases} 50.000 = 0a + b \\ 80.000 = 6a + b \end{cases}$ que té de solucions b=50.000 i a=5.000. La funció és

$y = 5.000x + 50.000$

Fent el mateix amb les demandes obtenim la funció de la demanda

$y = 3.000x + 72.000$

Igualant formem el sistema

$$\begin{cases} y = 5.000x + 50.000 \\ y = 3.000x + 72.000 \end{cases}$$

La solució és el punt d'equilibri demanat quan x=11. L'any 2013

11. **El cost de l'energia elèctrica s'obté mitjançant un sumand fix i un altre de proporcional a la quantitat d'energia gastada. En dos mesos diferents s'han pagat 35,70 € per 340 kWh i 32,14 € per 283 kWh. Quin és el sumand fix?**

La funció que hem de calcular és de la forma $f(x) = ax + b$ i coneixem dos punts que ens permeten plantejar

$$\begin{cases} 35{,}70 = 340x + b \\ 32{,}14 = 283x + b \end{cases}$$

Si resolem el sistema obtenim de resultats a=0,08 i b=8,50. La funció és

$f(x) = 0{,}08x + 8{,}50$

i el cost fix de 8,50 €

12. **La senyora Maiol és una venedora que condueix el seu propi cotxe en una empresa comercial. L'empresa, per als viatges, li subvenciona 0,18 €/km. La senyora Maiol calcula que els costos fixos que té cada any com ara impostos, assegurança, depreciació,.. són de 1.800 €. Els costos directes o variables, com ara combustible, oli i greixatge pugen 0,10 €/km. Escriu les funcions corresponents i determina el nombre de quilòmetres que ha de fer per no guanyar ni perdre diners**.

La funció que dóna els diners que guanya segons els x quilòmetres que fa és
$f(x) = 0{,}18x$
i la funció que dóna els diners que ha de pagar segons els quilòmetres
$f(x) = 1.800 + 0{,}1x$
Si volem que les dues funcions tinguin les mateixes imatges hem de resoldre el sistema

$$\begin{cases} y = 0{,}18x \\ y = 1.800 + 0{,}1x \end{cases}$$

la solució del sistema és x=22.500. Aquests són els quilòmetres que ha de fer per no guanyar ni perdre diners

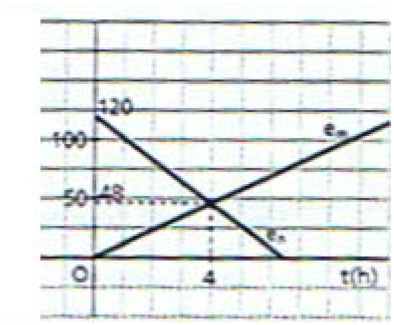
13. **En una muntanya hi ha disperses x casetes de guardes; cada caseta està unida a les restants per un camí diferent. Expressa el nombre de camins en funció de les casetes. Quin tipus de funció és. Escriu el primers termes d'aquesta funció**.

Cada casa està unida a les altres per un camí. De cada una de les x cases podem anar a cada una de les x-1 restants, però hem de tenir present que el camí serveix per dues cases alhora. La funció és

$$f(x) = \frac{x(x-1)}{2}$$

14. **Un noi surt de Bilbao amb bicicleta a les 12 hores en direcció a Irun a una velocitat de 12 km/h. Al mateix temps la seva xicota surt d'Irun en direcció a Bilbao a una velocitat de 18 km/h. La distància de Bilbao a Irun és de 120 km. Escriu les fórmules que donen a cada instant la distància a la que es troba cada un de Bilbao. Representa totes dues funcions en el mateix sistema d'eixos. A quina distància de Bilbao es trobaran? A quina hora es produirà la trobada?**

L'equació que dóna la posició del noi és $y = 12t$, l'equació que dóna la posició de la noia és $y = 120 - 18t$. Hem de tenir present que el noi s'allunya de Bilbao i la noia s'hi acosta. Si representem les dues funcions en els mateixos eixos observem que es tallen en un punt. Serà el lloc on es troben

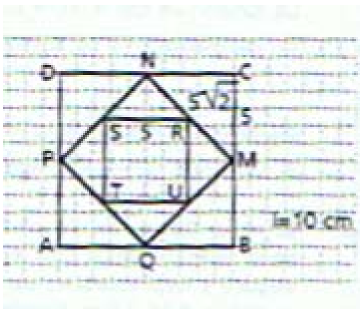


podem calcular el punt on es troben resolent el sistema

$$\begin{cases} y = 12t \\ y = 120 - 18y \end{cases} \Rightarrow 12t = 120 - 18t \quad \Rightarrow 30t = 120 \Rightarrow t = 4$$

Es troben al cap de 4 hores. Si substituïm t per aquest valor en cada una de les funcions obtenim la distància a Bilbao, de 48 quilòmetres

15. Unim els punts mitjos del costat d'un quadrat de 10 cm de costat i obtenim un altre quadrat. Repetim el procés indefinidament. Calcula la successió formada pels costats i la formada per les àrees dels quadrats successius.



El primer quadrat té de costat $c = 10$, el segon té de costat

$$c^2 = 5^2 + 5^2 = 2 \cdot 5^2 \quad \Rightarrow c = 5\sqrt{2}$$

el tercer

$$c^2 = \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow c = \sqrt{2\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{5\sqrt{2}\sqrt{2}}{2} = 5$$

i així successivament.

Les àrees són els quadrats dels costats, que formen una successió

$$100, \quad 50, \quad 25, \quad \frac{25}{2}, \quad \frac{25}{4}, \ldots$$

16. La població d'una granja avícola passa de 1.000 a 1.300 individus en un mes. Si suposem que segueix una llei exponencial de la forma $y = ka^x$, calcula la llei que expressa la població en funció del temps, la població al cap d'un any i quan hi haurà 66.541 individus

Coneixem dos valors de la funció i podem plantejar un sistema amb k i a d'incògnites

$$\begin{cases} 1000 = ka^0 \\ 1300 = ka^1 \end{cases}$$

on hem considerat l'inici com el mes 0. Resolent obtenim de la primera equació k=1000 i de la segona a=1,3. La funció és

$y = 1000 \cdot 1{,}3^x$

Si ens demanen que la població y sigui de 66.541 podem plantejar

$66.541 = 1000 \cdot 1{,}3^x \quad \Rightarrow 66{,}541 = 1{,}3^x$

i resolem amb logaritmes

$$x = \frac{\log 66{,}541}{\log 1{,}3} = 16$$