Equacions

1.Resol les equacions

$$\frac{x}{2}+\frac{3x}{4}-\frac{5x}{6}=15$$

$$\frac{x-1}{1}-\frac{x-2}{2}+\frac{x-3}{3}=0$$

$$\frac{2x}{15}-\frac{3x-5}{20}=\frac{x}{5}-3$$

$$\frac{x}{2}+\frac{3x}{4}-\frac{5x}{6}=15 \Rightarrow \frac{6x+9x-10x}{12}=15 \Rightarrow 5x=180 \Rightarrow x=36$$

$$\frac{x-1}{1}-\frac{x-2}{2}+\frac{x-3}{3}=0 \Rightarrow \frac{6x-6-3(x-2)+2(x-3)}{6}=0 \Rightarrow$$

$$6x-6-3x+6+2x-6=0 \Rightarrow 5x=6 \Rightarrow x=\frac{6}{5}$$

$$\frac{2x}{15}-\frac{3x-5}{20}=\frac{x}{5}-3 \Rightarrow \frac{8x-9x+15}{60}=\frac{12x-180}{60} \Rightarrow -x+15=12x-180 \Rightarrow$$

$$195=13x \Rightarrow x=15$$

3. Resol les equacions

$$\frac{3x-11}{20}-\frac{5x+1}{14}=\frac{x-7}{10}-\frac{5x-6}{21}$$

$$\frac{3x+17}{8}-\frac{1-4x}{13}=\frac{1-x}{4}-\frac{9+x}{6}$$

$\frac{3x-11}{20}-\frac{5x+1}{14}=\frac{x-7}{10}-\frac{5x-6}{21}$, el denominador comú és 420, transformem en

$$\frac{63x-231-150x+30}{420}=\frac{42x-294-100x+120}{420} \Rightarrow 63x-231-150x+30=42x-294-100x+120$$

operant obtenim $-29x=27 \Rightarrow x=-\frac{27}{29}$

En la segona equació el denominador comú és 312

$$\frac{117x-663-24+96x}{312}=\frac{78-78x-468+52x}{312}$$

$$117x-663-24+96x=78-78x-468+52x \Rightarrow 239x=297 \Rightarrow x=\frac{297}{239}$$

4. Resol les equacions

$x^2-7x-18=0$ $\qquad$ $3x^2+15x+18=0$

$7x^2+21x-28=0$ $\qquad$ $-x^2+4x-7=0$

Apliquem la fórmula que permet resoldre equacions de segon grau

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{7\pm\sqrt{49-48}}{2}=\frac{7\pm1}{2}=\begin{cases}4\\3\end{cases}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-15\pm\sqrt{225-216}}{6}=\frac{-15\pm3}{-6}=\begin{cases}-2\\-3\end{cases}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-21\pm\sqrt{441+784}}{14}=\frac{-21\pm\sqrt{1225}}{14}=\frac{-21\pm 35}{14}\begin{cases}1\\-4\end{cases}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-4\pm\sqrt{16-28}}{-2}=\frac{-4\pm\sqrt{-12}}{-2}\text{ ; no té solució}$$

5. Calcula les arrels reals de les equacions següents calculant-ne primer alguna arrel, utilitzant els divisors del terme independent

$x^4-10x^2+9=0$ $\qquad$ $x^4-26x^2+25=0$

$4x^4-17x^2+4=0$ $\qquad$ $4x^4-37x^2+9=0$

Podem fer divisions per treure factors del polinomi

	1	0	-10	0	9
1		1	1	-9	-9
	1	1	-9	-9	$\boxed{0}$
-1		-1	0	9	
	1	0	-9	$\boxed{0}$	
3		3	9		
	1	3	$\boxed{0}$		

El polinomi $x^4-10x^2+9=(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)$ té d'arrels x=1, x=-1, x=3 i x=-3

El segon polinomi

	1	0	-26	0	25
1		1	1	-25	-25
	1	1	-25	-25	$\boxed{0}$
-1		-1	0	25	
	1	0	-25	$\boxed{0}$	
5		5	25		
	1	5	$\boxed{0}$		

té de factor $(x-1)(x+1)(x-5)(x+5)$ i les arrels x=1, x=-1, x=5 i x=-5

El polinomi $4x^4-17x^2+4=0$ té les arrels 2 i –2. Ho calculem fent les divisions

	4	0	-17	0	4
2		8	16	-2	-4
	4	8	-1	-2	$\boxed{0}$
-2		-8	0	2	
	4	0	-1	$\boxed{0}$	

Del polinomi quocient $4x^2-1$ resulta fàcil calcular les arrels i els factors

$$4x^2-1\Rightarrow 4x^2=1\Rightarrow x^2=\frac{1}{4}\Rightarrow x=\begin{cases}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{cases}$$

Els quatre factors són $(x-2)(x+2)(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})$

El quart polinomi $4x^4-37x^2+9=0$ pot dividir-se per (x-3) i (x+3)

	4	0	-37	0	9
3		12	36	-3	-9
	4	12	-1	-3	$\boxed{0}$
-3		-12	0	-3	
	4	0	-1	$\boxed{0}$	

El quocient de les dues divisions és el mateix que en l'exercici anterior, aleshores els quatre factors són

$(x-3)(x+3)(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})$ i les arrels $x=\pm 3 \quad x=\pm\frac{1}{2}$

6. Busca les arrels reals de les següents equacions de tercer grau calculant-ne primer alguna arrel utilitzant els divisors del terme independent

$x^3-x^2-4=0$ $\qquad$ $x^3-x^2-x+1=0$

$x^3+3x^2-4x-12=0$ $\qquad$ $6x^3+x^2-26x-21=0$

En el primer polinomi $x^3-x^2-4=0$ podem calcular la divisió

	1	-1	0	-4
2		2	2	4
	1	1	2	$\boxed{0}$

Aleshores $(x-2)(x^2+x+2)$. No podem calcular més factors ja que el polinomi de segon grau no té arrels reals

El segon polinomi $x^3-x^2-x+1=0$ és

	1	-1	-1	1
1		1	0	-1
	1	0	-1	$\boxed{0}$
1		1	1	
	1	1	$\boxed{0}$	

Té de factors $(x-1)(x-1)(x+1)=(x-1)^2(x+1)$

En el tercer polinomi $x^3+3x^2-4x-12=0$

	1	3	-4	-12
2		2	10	12
	1	5	6	$\boxed{0}$
-2		-2	-6	
	1	3	$\boxed{0}$	

Té de factors $(x-2)(x+2)(x+3)$

El quart polinomi $6x^3+x^2-26x-21=0$

	6	1	-26	-21
-1		-6	5	21
	6	-5	-21	$\boxed{0}$

Té un factor x-1 i el polinomi de segon grau $6x^2-5x-21$ té d'arrels

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{5\pm\sqrt{25+504}}{12}=\frac{5\pm\sqrt{529}}{12}=\frac{5\pm 23}{12}=\begin{cases}\frac{7}{3}\\ -\frac{3}{2}\end{cases}$$

Els factors són $(x-1)\left(x-\frac{7}{3}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)$

8. Resol les equacions següents amb un radical

$\sqrt{x+4}=7$ $\qquad$ $x-\sqrt{25-x^2}=1$

$x-\sqrt{169-x^2}=17$ $\qquad$ $x+\sqrt{5x+10}=8$

$\sqrt{x+4}=7 \quad \Rightarrow x+4=49 \Rightarrow x=45$

$x-\sqrt{25-x^2}=1 \Rightarrow x-1=\sqrt{25-x^2}$, elevem al quadrat $x^2-2x+1=25-x^2$ que dóna l'equació de segon grau $2x^2-2x-24=0$, que simplifiquem a $x^2-x-12=0$, les solucions d'aquesta equació són 4 i –3

$x-\sqrt{169-x^2}=17 \quad \Rightarrow \quad x-17=\sqrt{169-x^2} \quad \Rightarrow \quad x^2-34x+289=169-x^2$
$2x^2-34x+120=0 \quad \Rightarrow \quad x^2-17x+60=0$ de solucions 5 i 12
$x+\sqrt{5x+10}=8 \quad \Rightarrow x-8=\sqrt{5x+10} \quad \Rightarrow x^2-16x+64=5x+10 \quad \Rightarrow x^2-21x+54=0$
Les solucions són 3 i 18

10. Resol els sistemes per substitució

$\begin{cases} 8x=y^2 \\ 2x-y=8 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} x-y=9 \\ xy=90 \end{cases}$

$\begin{cases} x+y=8 \\ x^2+y^2+xy=52 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} x^2+y^2=100 \\ x-7y=50 \end{cases}$

Si aïllem y a la segona equació i substituïm a la primera obtenim
$8x=(2x-8)^2 \quad \Rightarrow \quad 8x=4x^2-32x+64 \Rightarrow \quad 4x^2-40x+64=0$ Les solucions de l'equació de segon grau són $x=\begin{cases} 2 \\ 8 \end{cases}$, que donen respectivament y=-4 i y=8
Aïllem y a la primera i substituïm a la segona
$x(x-9)=90 \Rightarrow x^2-9x-90=0$
Les solucions de l'equació de segon grau són x=15 i x=-6. A la primera equació donen els valors de y=6 i y=-15
En el tercer sistema podem aïllar x a la primera com x=8-y. Si aquest valor el substituïm a la segona obtenim
$(8-y)^2+y^2+(8-y)y=52$
operant
$64-16y+y^2+y^2+8y-y^2=52$
$y^2-8y+12=0$
L'equació de segon grau dóna de solucions y=2 i y=6. Els valors de x són x=6 i x=2
En el quart sistema aïllem x a la segona x=50+7y i substituïm a la primera
$(50+7y)^2+y^2=100 \Rightarrow 2500+700y+49y^2+y^2=100 \Rightarrow$
$50y^2+700y+2400=0$
que podem simplificar a $y^2+14y+28=0$, les solucions d'aquesta equació de segon grau són $y=-6; \quad y=-8$, que donen valors de $x=8; \quad x=6$

12. Resol les equacions exponencials

$3^x=27$ $\qquad$ $3^{x+1}=729$
$3^x=81$ $\qquad$ $3^x=6561$

Primer observem si podem treure factors enters de cada nombre
$3^x=27=3^3 \Rightarrow x=3$
$3^{x+1}=729=3^6 \Rightarrow x+1=6 \Rightarrow x=5$
$3^x=81=3^4 \Rightarrow x=4$
$3^x=6561=3^8 \Rightarrow x=8$

13. Resol les equacions següents prenent logaritmes

$5^x=10$ $\qquad$ $3^{x+1}=80$

$2^x = 25$ $\quad$ $7^x = 39$

Si en cada equació prenem logaritmes a un costat i altre obtenim

$$x\log 5 = \log 10 \quad \Rightarrow x = \frac{\log 10}{\log 5} = 1{,}431$$

$$(x+1)\log 3 = \log 80 \Rightarrow x+1 = \frac{\log 80}{\log 3} \Rightarrow x = \frac{\log 80}{\log 3} - 1 = 2{,}989$$

$$x\log 2 = \log 25 \Rightarrow x = \frac{\log 25}{\log 2} = 4{,}644$$

$$x\log 7 = \log 39 \Rightarrow x = \frac{\log 39}{\log 7} = 1{,}883$$

15. Resol les equacions

$\log_2 x = 1$ $\quad$ $\log_7 x = 3$

$\log_2 x = -1$ $\quad$ $\log_2 x = -3$

$$\log_2 x = 1 \Rightarrow 2^1 = x \Rightarrow x = 2$$

$$\log_7 x = 3 \Rightarrow 7^3 = x \Rightarrow x = 343$$

$$\log_2 x = -1 \Rightarrow 2^{-1} = x \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\log_2 x = -3 \Rightarrow 2^{-3} = x \Rightarrow x = \frac{1}{8}$$

17. Resol les equacions

log x+log 50=log 1000 $\quad$ log x = 1 + log (22-x)

2 log x – log (x-16) = 2 $\quad$ log x^3 = log 6 + 2 log x

La primera equació es converteix en $50x = 1000$, i $x = 20$

En la segona equació hem d'observar que $1 = \log 10$ i la podem transformar en $x = 10(22-x) \quad \Rightarrow \quad 11x = 220 \quad \Rightarrow x = 20$

En la tercera equació $2 = \log 100$ i la podem transformar en $\dfrac{x^2}{x-16} = 100$, si operem dóna l'equació $x^2 = 100x - 1600 \quad \Rightarrow x^2 - 100x - 1600 = 0$. Resolem l'equació de segon grau i té de solucions x=20 i x=80

En la quarta equació $x^3 = 6x^2$. Si factoritzem $x^2(x-6) = 0$ de solucions x=0 i x=6

19. Resol les equacions següents

$5^{2x} - 30.5^x + 125 = 0$ $\quad$ $5^{2x} - 6.5^x + 5 = 0$

$3^{2x+2} - 28.3^x + 3 = 0$ $\quad$ $4^x - 5.2^x + 4 = 0$

$5^{2x} - 30.5^x + 125 = 0$; fent $5^x = t$ obtenim $t^2 - 30t + 125 = 0$, resolem aquesta equació de segon grau de solucions t=5 i t=25. Si t=5 x=1 i si t=25 x=2

$5^{2x} - 6.5^x + 5 = 0$, el canvi $5^x = t$ permet obtenir l'equació de segon grau $t^2 - 6t + 5 = 0$ que té de solucions t=1 i t=5; aleshores x=0 i x=1

$3^{2x+2} - 28.3^x + 3 = 0 \quad \Rightarrow 9.3^{2x} - 28.3^x + 3 = 0$, si fem el canvi $3^x = t$ obtenim l'equació de segon grau $9t^2 - 28t + 3 = 0$. Les solucions d'aquesta equació són $t = 3$ i $t = \dfrac{1}{9}$. De $t = 3$ obtenim x=1 i de $t = \dfrac{1}{9}$ obtenim $x = -2$

Si canviem $2^x = t$ serà $4^2 = t^2$, l'equació queda de segon grau $t^2 - 5t + 4 = 0$, resolem i tenim de solucions t=1 i t=4, aleshores x=0 i x=2

22. En una festa de cap d'any es reuneix un grup de nois i noies. El nombre de noies excedeix en 25 el de nois. Després que se n'hagin anat de la festa 15 nois i 15 noies, queda el triple de noies que de nois. Quants nois i quantes noies hi havia a la festa?

Podem plantejar, si x són els nois i y les noies, les equacions

$$\begin{cases} x+26=y \\ 3(x-15)=y-15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=-26 \\ 3x-y=30 \end{cases}$$

si resolem el sistema dóna x=28 i y=54

23. Disposem d'un recipient de 24 l de capacitat i de tres mesures A, B i C. Sabem que el volum de A és el doble que el de B, que les tres mesures omplen el dipòsit i que les dues primeres l'omplen fins a la meitat. Quina capacitat té cada mesura?

$$\begin{cases} a=2b \\ a+b+c=24 \\ a+b=12 \end{cases}$$

Si substituïm la tercera equació a la segona obtenim fàcilment c=12. De la primera i la tercera b=4 i a=8

24. Troba un nombre de tres xifres sabent que aquestes sumen 9, que si al nombre buscat li restem el que queda d'invertir l'ordre de les seves xifres la diferència és 198 i que, a més a més, la xifra de les desenes és la mitjana aritmètica de les altres dues

Si un nombre de tres xifres és de la forma cdu (c xifra de les centenes, d desenes i u unitats) el valor del nombre és 100c+10d+u. Aleshores si invertim l'ordre de les xifres el seu valor serà 100u+10d+c

$$\begin{cases} c+d+u=9 \\ (100c+10d+u)-(100u+10d+c)=198 \\ d=\dfrac{c+u}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c+d+u=9 \\ 99c-99u=198 \\ c+u-2d=0 \end{cases}$$

Si resolem el sistema obtenim d=3, c=4 i u=2. El nombre és 432

25. 20 persones van anar a una festa. La Maria va ballar amb 7 nois, l'Olga va ballar amb 8, l'Anna amb 9, i així successivament fins arribar a la Nina, que va ballar amb tots ells. Quants nois hi havia ala festa?

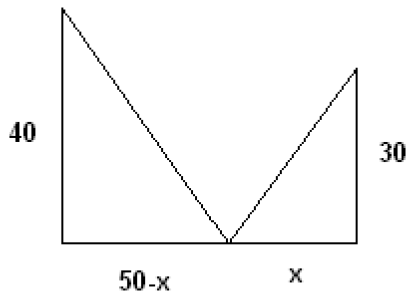
La noia "número" 1 balla amb 7 nois, la número 2 amb 8, la número 3 amb 9,... i la noia número n balla amb n+6, que són tots els nois de la festa. Hi ha n nois i n+6 nois. Podem plantejar

$$n+n+6=20 \quad \Rightarrow \quad n=7$$

A la festa hi havia 7 noies i 13 nois

27 Dues torres, una de 30 m i l'altra de 40, estan a una distància de 50 m. Entre les dues torres hi ha una font a la qual van a beure dos ocells que estan al capdamunt

de les torres. Volant a la mateixa velocitat arriben a la font al mateix temps. A quina distància de les torres està situada la font?



Considerem l'esquema. Les distàncies que volen els ocells són les hipotenuses de dos triangles rectangles. Podem plantejar que aquestes llargades són iguals

$$\sqrt{40^2+(50-x)^2}=\sqrt{30^2+x^2}$$

i elevem al quadrat

$$40^2+50^2-100x+x^2=30^2+x^2$$

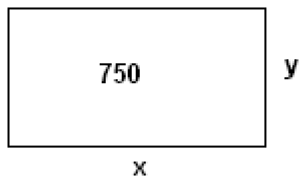
operant

$$3200=100x$$

$$x=32$$

La font està a 32 m de la torre de 30 m

30. Per tancar un terreny rectangular de 750 m^2 s'han utilitzat 110 m de filferro. Calcula les dimensions del terreny



L'àrea del rectangle és xy i el seu perímetre 2x+2y. Podem plantejar

$$\begin{cases} xy=750 \\ 2x+2x=110 \end{cases} \Rightarrow x(55-x)=750 \Rightarrow -x^2+55x=750$$

Si resolem l'equació de segon grau dóna de solucions x=25 i x=30. Aquestes són les dimensions