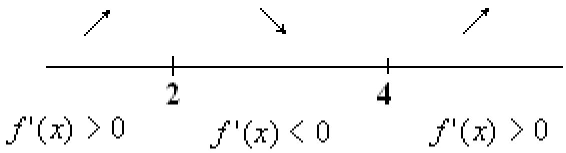
Derivades. Anàlisi de funcions

3. Estudia el creixement i decreixement, els màxims i els mínims de la funció
$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$
Calculem la derivada de la funció
$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$
igualem la derivada a zero i resolem

$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = \begin{cases} 4 \\ 2 \end{cases}$$

Estudiem el signe de la deriva en els intervals



La funció és creixent quan x<2 i quan x>4. La funció és decreixent a (2,4). En el punt x=2 la funció té un màxim i en x=4 la funció té un mínim

4. Estudia els màxims i els mínims de la funció

$$f(x) = \frac{3x-1}{3x^2+1}$$

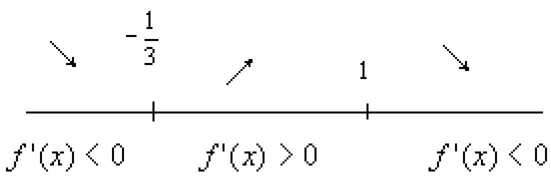
Calculem la derivada de la funció

$$f'(x) = \frac{3(3x^2+1) - 6x(3x-1)}{(3x^2+1)^2} = \frac{9x^2 + 3 - 18x^2 + 6x}{(3x^2+1)^2} = \frac{-9x^2 + 6x + 3}{(3x^2+1)^2}$$

Busquem els valors que fan zero la derivada. Resolem

$$-9x^2 + 6x + 3 = 0 \quad \Rightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{36+108}}{-18} = \frac{-6 \pm \sqrt{144}}{-18} = \frac{-6 \pm 12}{-18} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{cases}$$

La derivada val zero quan x=1 i quan $x = -\frac{1}{3}$. Estudiem els signes de la derivada ens els intervals



La funció és creixent a $\left(-\frac{1}{3}, 1\right)$ i decreixent a la resta. Té un màxim quan x=1 de valor $f(1) = \frac{1}{2}$ i té un mínim quan $x = -\frac{1}{3}$ de valor $f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}$

5. Calcula els punts de la corba $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ en què el pendent de la recta tangent sigui màxim

El pendent de la recta tangent en cada punt de la corba és el valor de la derivada de la funció en cada punt. Si derivem obtenim

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2} \quad f'(x)=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

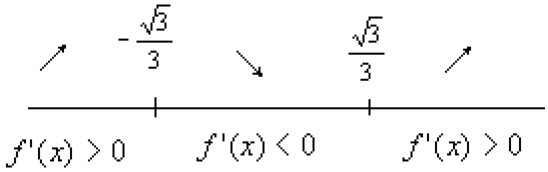
i ara volem obtenir el màxim valor d'aquesta derivada, calculem la segona derivada i igualem a zero

$$f''(x)=\frac{-2(1+x^2)^2+4x(1+x^2)2x}{\left(1+x^2\right)^4}=\frac{2(3x^2-1)}{\left(1+x^2\right)^3}$$

Les solucions són

$$2(3x^2-1)=0 \quad \Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3} \quad ; \quad x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Estudiem els signes de la funció i obtenim els intervals de creixement i decreixement. Observem que el denominador és sempre positiu



El màxim de la funció s'assoleix quan $x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ i el valor d'aquest màxim és

$$f'\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{8}$$

6. Calcula les equacions de les tangents a la corba $f(x)=x^3-3x^2+2$ en els punts d'inflexió

Els punts d'inflexió són aquells de segona derivada zero. La primera derivada és $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

i la segona

$f''(x)=6x-6$

Les solucions de $f''(x)=0$ és x=1. El valor de la derivada en x=1 és –3 i aquest és el pendent de la recta tangent. La recta ha de passar per $(1,f(1))=(1,0)$ i l'equació de la recta és $y=-3x+3$

7. Determina el paràmetre c perquè el mínim de la funció $f(x)=x^2+2x+c$ sigui igual a 8

Calculem la derivada de la funció

$f'(x)=2x+2$

La derivada val zero quan x=-1, aquest punt és un mínim ja que la segona derivada és positiva. Si el mínim de la funció ha de ser 8, la imatge del punt x=-1 ha de donar 8, aleshores

$8=f(-1) \quad \Rightarrow 8=1-2+c \Rightarrow c=9$

8. Donada la funció $f(x)=x^3+ax^2+5$, busca el valor de a perquè tingui un extrem relatiu quan x=2

La derivada de la funció és
$f'(x) = 3x^2 + 2ax$
Si la funció té un extrem relatiu a x=2, la derivada ha de ser zero quan x=2
$f'(x = 2) = 12 + 4a = 0 \quad \Rightarrow a = -3$

9. La funció $f(x) = 3x^2 + mx + 8$ presenta un mínim a x=1. Calcula m i el valor del mínim
La derivada de la funció és
$f'(x) = 6x + m$
Si té un mínim quan x=1, el valor de la derivada a x=1 ha de ser zero
$f'(x = 1) = 6 + m = 0 \quad \Rightarrow m = -6$
Per aquest valor de m la funció és $f(x) = 3x^2 - 6x + 8$ i la imatge quan x=1 dóna el valor del mínim
$f(x = 1) = 5$

10. Busca els valors de a i b perquè la funció $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ tingui un mínim relatiu igual a 3 a x=2

La derivada de la funció és
$f'(x) = 3x^2 + 2ax$
si té un extrem relatiu quan x=2, la derivada quan x=2 ha de ser zero. Ens permet escriure l'equació
$f'(x = 2) = 12 + 4a = 0 \quad \Rightarrow a = -3$
i calcular el valor de a
Si el valor d'aquest extrem ha de ser 3, la imatge de la funció quan x=2 és 3. Podem escriure
$3 = f(x = 2) \quad \Rightarrow 3 = 8 - 12 + b \Rightarrow b = 7$
i obtenir el valor de b
20. Descompon el nombre 100 en dos sumands de manera que el doble del quadrat del primer més tres vegades el quadrat del segon sigui mínim

Siguin les dues parts del nombre 100 la primera x i la segona 100-x. Hem de fer mínim
$f(x) = 2x^2 + 3(100 - x)^2 = 2x^2 + 30000 - 600x + 3x^2 = 5x^2 - 600x + 30000$
Derivem i igualem a zero
$f'(x) = 10x - 600 = 0 \quad \Rightarrow x = 60$
la segona derivada és positiva, l'extrem és un mínim. Els nombres són 60 i 40.

21. Descompon el nombre 4 en dos sumands de manera que la suma del quadrat del primer i el cub del segon sigui mínima. Raona la resposta

Les dues parts del nombre 4 són x i 4-x. La funció que ha de ser mínima és
$f(x) = (4 - x)^2 + x^3 = x^3 + x^2 - 8x + 16$
La derivada és
$f'(x) = 3x^2 + 2x - 8$
Igualant a zero i resolent obtenim

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 8 = 0 \quad \Rightarrow x = \begin{cases} -2 \\ \dfrac{4}{3} \end{cases}$$

La segona derivada és $f''(x) = 6x + 2$

Per a x=-2 la segona derivada és negativa (és un màxim), per a $x = \dfrac{4}{3}$ la segona derivada és positiva (és un mínim). El nombre 4 s'ha de descompondre amb $\dfrac{4}{3}$ i $\dfrac{8}{3}$

22. Busca un nombre de manera que en restar-li el seu quadrat la diferència sigui màxima. Raona la resposta

Hem de calcular el màxim de la funció $f(x) = x - x^2$. La derivada de la funció és $f'(x) = 1 - 2x$ que val zero quan $x = \dfrac{1}{2}$. La segona derivada és $f''(x) = -2 < 0$ negativa i aquest valor extrem correspon a un màxim

31. Volem construir un dipòsit cilíndric de 10 m^3 obert per dalt. Si sabem que el material de la base és cinc vegades més car que el de les parets, busca les dimensions que limiten el cost del material

El volum del cilindre és $10 = \pi r^2 h$, d'on podem aïllar $h = \dfrac{10}{\pi r^2}$. El cost del material serà

$$C = 5\pi r^2 + 2\pi rh = 5\pi r^2 + 2\pi r \frac{10}{\pi r^2} = 5\pi r^2 + \frac{20}{r}$$

La derivada de la funció

$$C' = 10\pi r - \frac{20}{r^2}$$

Igualant la derivada a zero i resolent

$$C' = 10\pi r - \frac{20}{r^2} = 0 \Rightarrow 10\pi r = \frac{20}{r^2} \quad \Rightarrow r^3 = \frac{2}{\pi} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{2}{\pi}} = 0{,}86$$

Per comprovar que és un mínim podem estudiar els intervals de creixement i decreixement de la funció o calcular la segona derivada

$$C'' = 10\pi + \frac{40}{r^3}$$

Per aquest valor de r la segona derivada és positiva, aleshores és un valor mínim

39. La quantitat d'aigua recollida l'any 1995 (en milions de litres) en un pantà determinat, com a funció de l'instant de temps (en mesos), ve donada per l'expressió

$$f(t) = \frac{10}{(t-6)^2 + 1} \qquad 0 \le t \le 12$$

En quin període de temps va augmentar la quantitat d'aigua recollida? En quin instant es va obtenir la quantitat màxima d'aigua? Quina va ser aquesta quantitat màxima?

Calculem la derivada de la funció i estudiem els intervals de creixement i decreixement

$$f'(t)=\frac{120-20t}{\left[(t-6)^2+1\right]^2}$$

La derivada val zero quan $t=6$. Si t<6 la derivada és positiva i si t>6 la derivada és negativa, t=6 és un màxim. Els intervals de creixement i decreixement de la funció són els que indica l'esquema

↗	6	↘
$f'(x)>0$		$f'(x)<0$

La quantitat màxima d'aigua recollida és la imatge de t=6

$f(6)=10$

40. La producció d'una hortalissa determinada en un hivernacle (Q(x) en kg) depèn de la temperatura (x en ºC) segons l'expressió $Q(x)=(x+1)^2(32-x)$. Calcula raonadament quina és la temperatura òptima que cal mantenir a l'hivernacle. Quina producció d'hortalissa es pot obtenir?

La temperatura òptima serà aquella que faci màxima la producció. Derivem la funció

$Q(x)=(x+1)^2(32-x)=-x^3+30x^2+63x+32$

$Q'(x)=-3x^2+60x+63$

Els valors que fan zero la derivada són

$$Q'(x)=-3x^2+60x+63=0\Rightarrow x=\begin{cases}-1\\21\end{cases}$$

i els signes de la derivada donen els intervals de creixement de la funció

↘	-1	↗	21	↘
$f'(x)<0$		$f'(x)>0$		$f'(x)<0$

La temperatura òptima serà 21º i la producció

$Q(21)=5.324$