1 En una certa zona, la quantitat de sofre que hi ha a l'atmosfera en parts per milió, evoluciona d'acord amb la funció $s(t) = 2{,}1 - 0{,}2t + 0{,}03t^2$, on t és el temps expressat en anys. Determina la presència de sofre en l'actualitat i quants anys han de transcórrer perquè s'assoleixi novament el valor actual

Hem de calcular $s(0) = 2{,}1$, actualment hi ha 2,1 parts per milió

Hem de fer que $s(t) = 2{,}1$, d'on plantegem

$s(t) = 2{,}1 - 0{,}2t + 0{,}03t^2 = 2{,}1 \Rightarrow$

$-0{,}2t + 0{,}03t^2 = 0 \Rightarrow$

$t(-0{,}2 + 0{,}03t) = 0$

Les solucions són t=0 i $t = \dfrac{0{,}2}{0{,}03} = 6{,}66$ anys

2 Defineix la funció que expressa la suma de dos nombres enters tal que el seu producte és 18. Troba'n el domini

La funció és $S(x) = x + \dfrac{18}{x} = \dfrac{x^2 + 18}{x}$

El domini són els nombres enters

{-18, -9, -6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6, 9, 18}

3 En un triangle la suma de les longituds de la base i l'altura és 15 cm. Expressa l'àrea del triangle en funció de la longitud de la base. Troba el domini d'aquesta funció

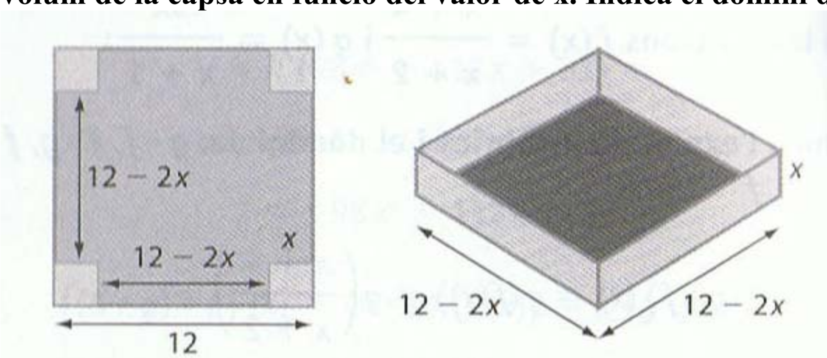
Si la base és x, l'altura és 15-x. L'àrea del triangle

$A(x) = \dfrac{x(15 - x)}{2} = -\dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{15}{2}x$

x pot ser un nombre major de zero i menor de 15. El domini de la funció és

(0,15)

4 Volem construir una capsa sense tapa amb una cartolina quadrada de 12 cm de costat. Per fer-ho retallem quadrats iguals de costat x cm en cadascuna de les quatre cantonades de la cartolina. Determina l'expressió algèbrica que ens dóna el volum de la capsa en funció del valor de x. Indica el domini d'aquesta funció.



El quadrat de la base té de costat 12-2x i l'altura del prisma és x. El volum és

$V(x) = (12 - 2x)^2 x = (144 - 48x + 4x^2)x = 4x^3 - 48x^2 + 144x$

El domini de la funció és l'interval (0,6)

5 Troba el domini de la funció que expressa l'àrea d'un rectangle de 30 cm de perímetre en funció de la longitud d'un dels costats

Si x i y són les dimensions del rectangle de perímetre 30 podem escriure
$2x + 2y = 30 \Rightarrow x + y = 15 \Rightarrow y = 15 - x$
L'àrea del rectangle és
$A = xy = x(15 - x) = 15x - x^2$
El domini de la funció és l'interval (0,15)

6 L'altura d'un cilindre és el triple del radi de la base. Escriu l'expressió del volum del cilindre en funció del radi de la base. Quin serà el volum d'un cilindre per a un radi de 5 cm? Quin és el valor del radi de la base si el volum del cilindre és de $24\pi\ cm^3$?. Troba el domini de la funció suposant que el volum màxim és de $3{,}75 \cdot 10^5\ \pi\ cm^3$

$V = \pi\, r^2 h = \pi\, r^2 \cdot 3r = 3\pi\, r^3$
El volum si el radi és 5
$V(r = 5) = 3\pi\, 5^3 = 375\pi\ cm^3$
El radi d'un volum de $24\pi\ cm^3$

$$24\pi = 3\pi\, r^3 \Rightarrow \frac{24\pi}{3\pi} = r^3 \Rightarrow 8 = r^3 \Rightarrow r = \sqrt[3]{8} = 2$$

El radi que correspon a un màxim volum de $3{,}75 \cdot 10^5\ \pi\ cm^3$ és

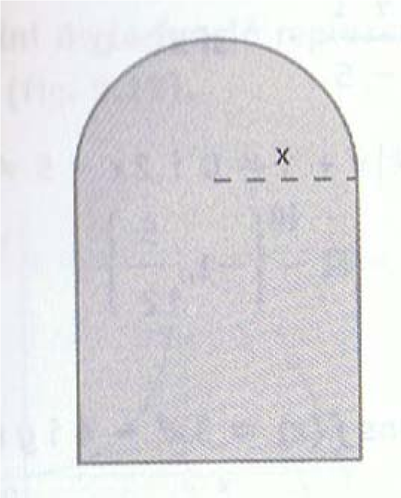
$$3{,}75 \cdot 10^5\ \pi = 3\pi\, r^3 \quad \Rightarrow r^3 = \frac{375000}{3} = 125000 \Rightarrow r = \sqrt[3]{125000} = 50$$

El màxim radi és 50 i el domini de la funció és (0,50)

7 Dos nombres naturals sumen 20. Expressa'n el producte en funció d'un d'ells. Troba'n el domini d'aquesta funció. Comprova que 15 és del domini i que 28 no ho és.

Els dos nombres naturals que sumen 20 són x i 20-x. El seu producte
$P(x) = x(20 - x) = 20x - x^2$
El domini són els naturals menors de 20, és a dir
{1, 2, 3, 4, ...,17, 18, 19}
El 15 forma part del domini, el 28 no

8 Es vol construir una finestra formada per un quadrat i un semicercle de radi x. Troba les expressions del perímetre i de l'àrea de la finestra en funció de x. Indica el domini en cadascuna d'aquestes funcions



El perímetre són tres costats d'un quadrat i mitja circumferència

$$P(x) = 6x + \frac{2\pi\, x}{2} = 6x + \pi\, x = (6+\pi)x$$

L'àrea és un quadrat i la meitat d'un cercle

$$A(x) = (2x)^2 + \frac{\pi\, x^2}{2} = 4x^2 + \frac{\pi\, x^2}{2} = x^2\left(4 + \frac{\pi}{2}\right)$$

El domini són tots els reals positius $(0,+\infty)$

9 El radi d'una taca d'oli circular creix a un ritme de 3 cm per minut i el centre es troba a 9 cm del marge de la taula. a) Expressa la funció que assigna a cada instant t el valor del radi de la taca. b) Quant trigarà la taca d'oli a arribar al marge de la taula?. c) Escriu l'expressió algèbrica de la funció que assigna a cada instant t el valor de l'àrea de la taca d'oli. d) Calcula l'àrea en el instant en que la taca arriba al marge de la taula.

El radi en funció de t és $r(t) = 3t$

El radi serà 9, el marge de la taula, quan $3t = 9 \Rightarrow t = 3$, al cap de 3 minuts

L'àrea de la taca és

$$S = \pi\, r^2 = \pi\,(3t)^2 = 9\pi\, t^2$$

L'àrea, quan t=3, és

$$S(t=3) = 9\pi\, 3^2 = 81\pi\, cm^2$$

10 Suposem que establir una trucada telefònica costa 0,50 € i, a partir d'aquest moment, el preu és de 0,30 € per minut. Troba l'expressió algèbrica de la funció que ens determina l'import d'una trucada telefònica en funció de la seva durada. Quant costarà una trucada de 8 minuts? Quants minuts ha durat una trucada l'import de la qual és de 5,30 €?

$$f(t) = 0{,}5 + 0{,}3t$$

$$f(t=8) = 0{,}5 + 0{,}3\cdot 8 = 0{,}5 + 2{,}4 = 2{,}9\,€$$

$$f(t) = 0{,}5 + 0{,}3t = 5{,}30 \Rightarrow 0{,}3t = 4{,}8 \Rightarrow t = \frac{4{,}8}{0{,}3} = 16\ mn$$

11 La funció $f(t) = 2t^2 + 5t$ expressa la distància recorreguda per un mòbil en funció del temps, om t s'expressa en segons i f(t) en metres. Troba la distància recorreguda pel mòbil entre els instants t=1 i t=2. Quant de temps trigarà el mòbil a recórrer una distància de 75 m?

$f(2) = 2 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 = 18 \qquad f(1) = 2 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 = 7$

$f(2) - f(1) = 11$

Plantegem $f(t) = 2t^2 + 5t = 75$ i resolem l'equació

$$2t^2 + 5t - 75 = 0 \quad \Rightarrow t = \frac{-5 \pm \sqrt{25+600}}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{625}}{4} = \frac{-5 \pm 25}{4} = \begin{cases} = 5 \\ = -\dfrac{15}{2} \end{cases}$$

Sembla tenir sentit la solució positiva, al cap de 5 segons

12 En mesurar la temperatura a diferents alçades, s'ha observat que la temperatura disminueix 1ºC cada 200 m d'alçada. Si en un dia determinat la temperatura arran de terra és de 12 ºC, escriu l'expressió algèbrica de la funció h(t) essent h l'alçada en metres i t(h) la temperatura en ºC. Quina temperatura hi haurà a 6 km d'alçada. A quina alçada hi haurà una temperatura de –50ºC?

$$t(h) = 12 - \frac{h}{200}$$

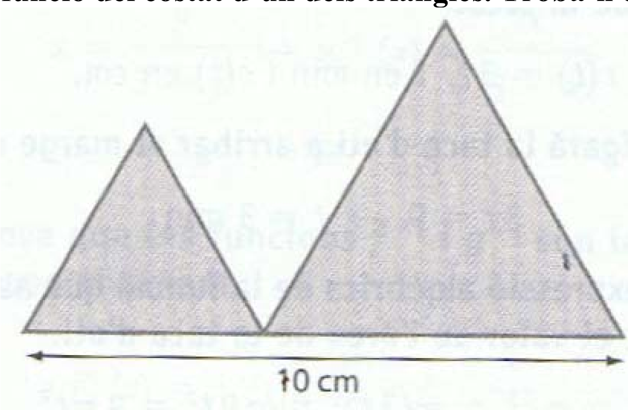
$$t(6.000) = 12 - \frac{6.000}{200} = 12 - 30 = -18^{\circ} C$$

l'altura on hi ha una temperatura de –50ºC és

$$t(h) = 12 - \frac{h}{200} = -50 \quad \Rightarrow 12 + 50 = \frac{h}{200} \Rightarrow 62 = \frac{h}{200} \Rightarrow h = 62 \cdot 200 = 12400$$

a una altura de 12,4 km

13 Dividim un segment de 10 cm de longitud en dues parts. Expressa la suma de les àrees dels triangles equilàters construïts sobre cadascuna d'aquestes dues parts en funció del costat d'un dels triangles. Troba'n el domini



Els costats dels dos triangles són x i 10-x. La suma de les seves àrees

$$S(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}(10-x)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(x^2 + 100 - 20x + x^2\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(2x^2 - 20x + 100\right)$$

El domini és l'interval (0,10)

14 Troba el domini de les funcions següents

$f(x)=\dfrac{2}{x^2-10x+16}$	$g(x)=\sqrt{-\dfrac{2}{3}x+8}$
$h(x)=\sqrt[3]{8-x^5}$	$k(x)=\dfrac{7x}{3x^2+3}$

$$f(x)=\frac{2}{x^2-10x+16}$$

Si resolem $x^2-10x+16=0$ les solucions són x=2 i x=8. Aleshores el domini de la funció és tot els reals excepte 2 i 8

$D=\Re-\{2,8\}$

$$g(x)=\sqrt{-\frac{2}{3}x+8}$$

Hem de demanar que $-\dfrac{2}{3}x+8\geq 0$ i la solució és $x\leq 12$, aleshores el domini és

$D=(-\infty,12]$

$$h(x)=\sqrt[3]{8-x^5}$$

El domini són tots els reals

$$k(x)=\frac{7x}{3x^2+3}$$

Si plantegem $3x^2+3=0$ veiem que no té solucions reals, aleshores el domini són tots els reals

16 Determina el domini de cadascuna de les funcions següents

$f(x)=\dfrac{2+x}{\sqrt{3-x}}$	$g(x)=\dfrac{4x+1}{x^2+7x}$
$h(x)=\dfrac{2x+1}{\sqrt[3]{8-x^3}}$	$k(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x+1} & si\ x<0\\ \dfrac{3x+1}{2x-5} & si\ x\geq 0\end{cases}$

$$f(x)=\frac{2+x}{\sqrt{3-x}}$$

$3-x>0 \quad \Rightarrow x<3$

el domini és $(-\infty,3)$

$$g(x)=\frac{4x+1}{x^2+7x}$$

Resolem $x^2+7x=0 \quad \Rightarrow x=\begin{cases}0\\-7\end{cases}$

El domini són tots els reals exepte –7 i 0

$D=\Re-\{-7,0\}$

$$h(x) = \frac{2x+1}{\sqrt[3]{8-x^3}}$$

el denominador serà 0 quan x=2, el domini són tots els reals excepte 2

$$D = \Re - \{2\}$$

$$k(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x+1} & si\ x < 0 \\ \dfrac{3x+1}{2x-5} & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

Els dos denominadors valen zero quan x=-1, dins del domini de definició, i quan $x = \frac{5}{2}$, també dins del domini de definició. Aleshores

$$D = \Re - \left\{-1, \frac{5}{2}\right\}$$

17 Donades les funcions $f(x) = 3x^2 + 4$ i $g(x) = 3(x-1)^2$, troba $(f+g)(x)$, $g(x-2)$, $(f \cdot g)(x)$, $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$, $(f \circ g)(x)$ i $(g \circ f)(x)$

$$(f+g)(x) = 3x^2 + 4 + 3(x-1)^2 = 6x^2 - 6x - 1$$
$$g(x-2) = 3(x-2-1)^2 = 3(x-3)^2 = 3x^2 - 18x + 27$$
$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (3x^2 - 4)3(x-1)^2 = (3x^2-4)3(x^2 - 2x + 1) =$$
$$= 9x^4 - 18x^3 - 3x^2 + 24x - 12$$
$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{3(x-1)^2}{3x^2-4} = \frac{3x^2 - 6x + 3}{3x^2 - 4}$$
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3(x-1)^2) = 3(3(x-1)^2)^2 - 4 =$$
$$= 3 \cdot 9(x-1)^4 - 4 = 27x^4 - 108x^3 + 162x^2 - 108x + 23$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x^2 - 4) = 3(3x^2 - 4 - 1)^2 =$$
$$= 27x^4 - 90x^2 + 75$$

20 Calcula f(-3), f(-1), f(0), f(1) i f(2) i troba el domini de

$$f(x) = \begin{cases} -2x+3 & x < -1 \\ \dfrac{x^2+1}{x-2} & -1 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{x+3} & x > 1 \end{cases}$$

El domini són tots els nombres reals

$$f(-3) = 9$$
$$f(-1) = -\frac{2}{3}$$
$$f(0) = -\frac{1}{2}$$
$$f(1) = -2$$

$f(2)=\sqrt{5}$

23 Donada la funció $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$, comprova que $(f\circ f)(x)=x$. Per què creus que passa això? Justifica'n la resposta

$$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f\left(\frac{x}{x-1}\right)=\frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1}-1}=\frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{1}{x-1}}=x$$

La funció és inversa d'ella mateixa, es a dir $f^{-1}(x)=f(x)$