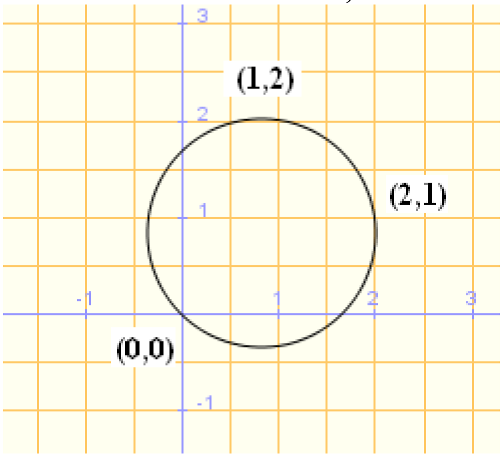
1 Esbrina si els punts P(1,2), Q(2,1) i R(0,0) es troben en una mateixa circumferència. Si és així, determina'n el centre, el radi i l'equació



Els tres punts no estan alineats i es troben en una circumferència. L'equació general és

$x^2 + y^2 - 2ax - 2bx + p = 0$

si substituïm els punts obtenim

$(1,2) \to 1 + 4 - 2a - 4b + p = 0$

$(2,1) \to 4 + 1 - 4a - 2b + p = 0$

$(0,0) \to 0 + 0 - 0 - 0 + p = 0$

Si resolem el sistema obtenim, de la tercera equació $p = 0$, substituint a les dues primeres

$$\begin{cases} -2a - 4b = -5 \\ -4a - 2b = -5 \end{cases} \to \begin{matrix} 4a + 8b = 10 \\ -4a - 2b = -5 \end{matrix} \to \begin{matrix} a = \frac{5}{6} \\ b = \frac{5}{6} \end{matrix}$$

el centre de la circumferència és el punt $C = \left(\frac{5}{6}, \frac{5}{6}\right)$ i el radi

$$p = 0 = r^2 - a^2 - b^2 \Rightarrow r^2 = 2 \cdot \frac{25}{36} \Rightarrow r = \frac{5\sqrt{2}}{6}$$

i l'equació és

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2bx + p = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - \frac{5}{3}x - \frac{5}{3}y = 0$$

2 Determina el centre i el radi de la circumferència $2x^2 + y^2 - 4x + 12y - 12 = 0$

No és una circumferència. Els coeficients dels termes de segon grau són diferents

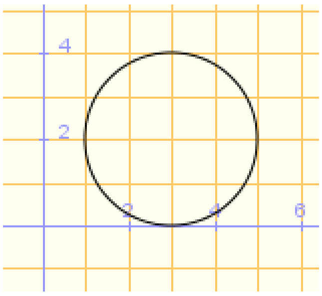
3 Escriu l'equació d'una circumferència de centre (3,2) i tangent a l'eix d'abscisses. De centre (-1,2) i tangent a l'eix d'ordenades. Troba l'eix radical de les dues circumferències anteriors. Comprova que aquest eix és perpendicular a la recta determinada pels centres

Si la circumferència és tangent a l'eix de les abscisses, el radi és 2. L'equació és

$(x-3)^2+(y-2)^2=2^2$

$x^2-6x+9+y^2-4y+4=4$

$x^2+y^2-6x-4y+9=0$

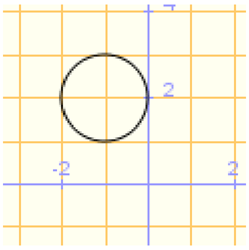


De la mateixa manera la segona circumferència té radi 1

$(x+1)^2+(y-2)^2=1^2$

$x^2+2x+1+y^2-4y+4=1$

$x^2+y^2+2x-4y+4=0$



L'eix radical s'obté igualant les dues equacions

$x^2+y^2-6x-4y+9=x^2+y^2+2x-4y+4$

$8x=5 \Rightarrow x=\dfrac{5}{8}$

L'eix radical és una recta vertical. La recta determinada pels dos centres (3,2) i (-1,2) és una recta horitzontal $y=2$. Les dues rectes són perpendiculars

4 Determina l'equació d'una circumferència de radi 4 que passa per A(1,2) i B(3,4)

Sigui (x,y) el centre de la circumferència. La distància del centre a A i a B és 4. Podem escriure

$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}=4$

$\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}=4$

Si desenvolupem les equacions i simplifiquem

$$\begin{cases} x^2-2x+1+y^2-4y+4=16 \\ x^2-6x+9+y^2-8y+16=16 \end{cases}$$

obtenim $x+y=5$, si substituïm a una de les dues equacions obtenim

$\sqrt{(x-1)^2+(5-x-2)^2}=4$

$\sqrt{(x-1)^2+(3-x)^2}=4$

$x^2-2x+1+9-6x+x^2=16$

$2x^2-8x-6=0$

$x=\dfrac{8\pm\sqrt{64+48}}{4}=\dfrac{8\pm\sqrt{112}}{4}=2\pm\sqrt{7}$

La coordenada x del centre és $2\pm\sqrt{7}$, la coordenada y $3\pm\sqrt{7}$. Són els dos possibles centres de les dues possibles circumferències. Les equacions són

$(x-(2+\sqrt{7}))^2+(y-(3-\sqrt{7}))^2=16$

$(x-(2-\sqrt{7}))^2+(y-(3+\sqrt{7}))^2=16$

Una manera diferent de buscar el centre d'aquesta circumferència és veure que està a la mediatriu del segment AB, si calculem l'equació podem veure que el vector director és (2,2), en volem un de perpendicular, per exemple (1,-1). Passa per punt mitjà del segment AB, que és (2,3)

$\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{-1}\quad\Rightarrow -x+2=y-3\quad\Rightarrow y=5-x$

és la mateixa relació d'abans. Si ara demanem un punt d'aquesta recta que estigui a una distància de 4 unitats del punt A(1,2) podem escriure

$(x-1)^2+(5-x-2)^2=4^2\quad\Rightarrow (x-1)^2+(3-x)^2=4^2$

d'on obtenim la mateixa equació de segon grau que abans

5 Una circumferència és tangent a la recta $y=x+1$ en el punt d'abscissa 3. Se sap que la circumferència també passa pel punt $A(3,-1)$. Troba l'equació d'aquesta circumferència

El centre de la circumferència es troba en la intersecció de la recta perpendicular a la tangent en el punt (3,4) i la mediatriu del segment determinat per aquest punt i el (3,-1). La primera recta té pendent -1 i la seva equació és $y=-x+7$, la segona recta és una recta horitzontal d'equació $y=\dfrac{3}{2}$. La solució del sistema dóna el centre de la circumferència, el punt $\left(\dfrac{11}{2},\dfrac{3}{2}\right)$

El radi de la circumferència és la distància entre el centre i el punt (3,4)

$r=\sqrt{\left(\dfrac{5}{2}\right)^2+\left(-\dfrac{5}{2}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{50}{4}}=\sqrt{\dfrac{25}{2}}=\dfrac{5}{\sqrt{2}}$

i l'equació de la circumferència

$\left(x-\dfrac{11}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{25}{2}$

6 L'incentre d'un triangle és el centre de la circumferència inscrita en el triangle. Si els vèrtexs d'un triangle són els punts (0,0), (4,0) i (0,4), quina és l'equació de la circumferència inscrita? Fes-ne un dibuix.

L'incentre és el punt intersecció de les bisectrius. Una de les bisectrius és la recta y=x. Busquem altra bisectriu.
Dues rectes que formen els costats del triangle són $y=-x+4$ i $x=0$. La bisectriu de l'angle que formen les dues rectes és

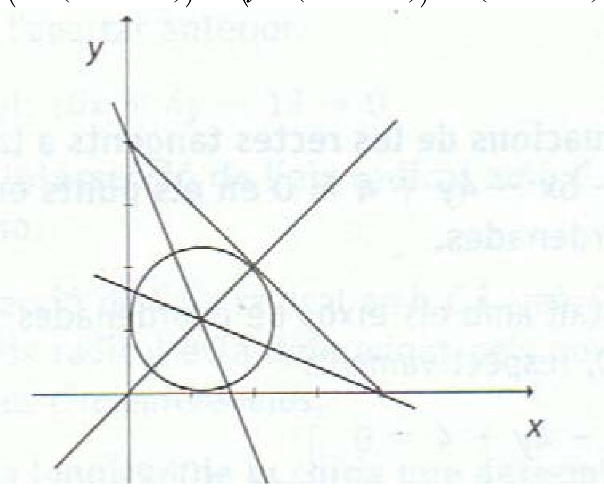
$$\frac{x+y-4}{\sqrt{2}}=-x$$

el punt d'intersecció serà la solució de

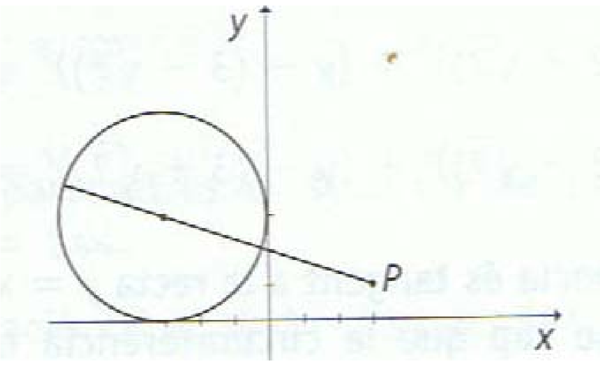
$$\frac{x+x-4}{\sqrt{2}}=-x \Rightarrow 2x-4=-\sqrt{2}x \Rightarrow x(2+\sqrt{2})=4 \Rightarrow x=\frac{4}{2+\sqrt{2}}=4-2\sqrt{2}$$

aleshores el centre és el punt $\left(4-2\sqrt{2},4-2\sqrt{2}\right)$. El radi és la distància d'aquest punt a una de les rectes, que és $4-2\sqrt{2}$. L'equació de la circumferència

$$\left(x-(4-2\sqrt{2})\right)^2+\left(y-(4-2\sqrt{2})\right)^2=(4-2\sqrt{2})^2$$



7 Dibuixa la circumferència que té com a equació $x^2+y^2+6x-6y+9=0$. Considera el punt P(3,1). Troba la potència i la posició d'aquest punt respecte de la circumferència. Troba el punt més proper i més llunyà a P que pertanyi a la circumferència



El centre de la circumferència és el punt C(-3,3) i el radi és r=3. La potència del punt P és

$$3^2+1^2+6\cdot 3-6\cdot 1+9=31>0$$

Com que dóna un valor positiu, el punt és exterior a la circumferència. Fem l'equació de la recta determinada pel centre de la circumferència i el punt P
Recta que uneix (3,1) i (-3,3)

$$\frac{x-3}{6}=\frac{y-1}{-2} \quad \Rightarrow -2x+6=6y-6 \Rightarrow 12=2x+6y \Rightarrow x+3y=6$$

Calculem les interseccions d'aquesta recta amb la circumferència resolent el sistema formar per les dues equacions

$$\begin{cases} x^2+y^2+6x-6y+9=0 \\ \quad\quad x+3y=6 \end{cases}$$

Aïllem x a la segona i substituïm a la primera

$$(6-3y)^2+y^2+6(6-3y)-6y+9=0$$

$$36-36y+9y^2+y^2+36-18y-6y+9=0$$

que porta a l'equació de segon grau

$$10y^2-60y+81=0$$

de solucions

$$y=3\pm\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

El punt més proper és $\left(-3+\frac{9\sqrt{10}}{10},3-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)$ i el més llunyà $\left(-3-\frac{9\sqrt{10}}{10},3+\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)$

8 Escriu les equacions de les rectes tangents a la circumferència $x^2+y^2-6x-4y+4=0$ en els punts en que talla els eixos de coordenades

Els punts de tall amb els eixos s'obtenen fent x=0 i y=0 a l'equació de la circumferència. Si x=0 el punt de tall és únic (0,2)

Si y=0 obtenim dos punts de tall $(3+\sqrt{5},0)$ i $(3-\sqrt{5},0)$

En el punt (0,2) la recta tangent és la recta vertical x=0

Per calcular les altres dues rectes tangents hem de calcular un vector perpendicular al que uneix cada punt amb el centre de la circumferència. Primer calculem el centre que és el punt (3,2)

El vector que uneix el centre (3,2) i $(3+\sqrt{5},0)$ és $\left(\sqrt{5},-2\right)$, un perpendicular és $\left(2,\sqrt{5}\right)$, l'equació de la tangent

$$\frac{x-(3+\sqrt{5})}{2}=\frac{y}{\sqrt{5}}$$

En el segon punt, el vector que l'uneix amb el centre és $\left(\sqrt{5},2\right)$, un perpendicular $\left(2,-\sqrt{5}\right)$ i l'equació de la tangent

$$\frac{x-(3-\sqrt{5})}{2}=\frac{y}{-\sqrt{5}}$$

11 Considera la circumferència $x^2+y^2+2x-8y+12=0$. Escriu l'equació de la circumferència concèntrica que té un radi $\sqrt{5}$ unitats més que la primera

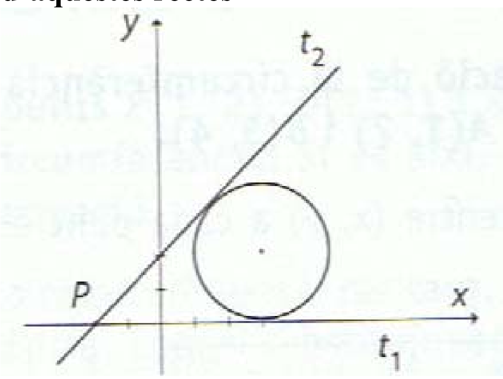
El centre de la primera és el punt (-1,4) i el radi és

$$-12=r^2+1+16 \quad \Rightarrow r^2=5 \Rightarrow r=\sqrt{5}$$

el radi de la segona ha de ser $\sqrt{5}+\sqrt{5}=2\sqrt{5}$ i mantenir el mateix centre. La seva equació és

$(x+1)^2+(y-4)^2=(2\sqrt{5})^2$
si desenvolupem obtenim
$x^2+y^2+2x-8y-3=0$

12 Des d'un punt exterior a una circumferència es poden traçar dues rectes tangents a la circumferència. Considera el punt P(-2,0) i la circumferència $x^2+y^2-6x-4y+9=0$. Traça les rectes tangents i determina les equacions d'aquestes rectes



Les rectes que passen pel punt P(-2.0) de pendent m tenen d'equació genèrica

$$\frac{x+2}{1}=\frac{y}{m} \quad \Rightarrow y=m(x+2)$$

Aquesta recta serà tangent a la circumferència quan el sistema format per les dues equacions tingui només una solució, un únic punt de contacte
$x^2+y^2-6x-4y+9=0$
fem $y=m(x+2)$ i obtenim
$x^2+(m(x+2))^2-6x-4m(x+2)+9=0$
si desenvolupem
$x^2+m^2x^2+4m^2x+4m^2-6x-4mx-8m+9=0$
$(1+m^2)x^2+(4m^2-4m-6)x+(4m^2-8m+9)=0$
Una equació de segon grau on el discriminant ha de ser zero si volem que tingui una única solució
$\Delta=b^2-4ac=(4m^2-4m-6)^2-4(1+m^2)(4m^2-8m+9)$
Si ara calculem obtenim
$16m^4-32m^3-32m^2+48m+36-(16m^4-32m^3+52m^2-32m+36)=$
$=-84m^2+80m=0$
les solucions són

$$-84m^2+80m=0 \Rightarrow \begin{cases} m=0 \\ m=\dfrac{20}{21} \end{cases}$$

que són els dos possibles pendents de la recta tangent. Les equacions de les dues rectes són

$$y=0 \qquad \text{i } y=\frac{20}{21}(x+2)$$

16 Busca el valor de k per tal que la recta $3x + y + k = 0$ sigui tangent a la circumferència d'equació $x^2 + y^2 - 6x = 0$. Hi ha més d'una solució?. Raona la resposta.

La recta és tangent quan només té un punt en comú. Resolem el sistema format per la recta i la circumferència demanant que la solució sigui única
Aïllem y a la recta $y = -3x - k$
l'equació serà $x^2 + (-3x - k)^2 - 6x = 0$ si desenvolupem
$10x^2 + (6k - 6)x + k^2 = 0$
El discriminant ha de ser zero. Podem plantejar
$\Delta = (6k - 6)^2 - 4 \cdot 10k^2 = 0$
$-k^2 - 18k + 9 = 0$
Les solucions són
$k = -9 \pm 3\sqrt{10}$
Són dues rectes paral·leles

17 El punt P(0,-1) és de la circumferència $x^2 + y^2 + 3x - 2y - 3 = 0$?. Troba l'equació de la recta tangent a la circumferència per aquest punt.

Si substituïm el punt a l'equació de la circumferència observem que la verifica, aleshores el punt forma part de la circumferència.
El centre de la circumferència és el punt $C\left(-\frac{3}{2}, 1\right)$, el vector que uneix aquest punt i P és de la forma $v = \left(\frac{3}{2}, -2\right)$, un vector perpendicular $\left(2, \frac{3}{2}\right)$ i aquest és el vector director de la recta tangent. L'equació d'aquesta recta és
$$\frac{x}{2} = \frac{y+1}{\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{3x}{2} = 2y + 2 \Rightarrow 3x = 4y + 4 \Rightarrow -3x + 4y + 4 = 0$$

18 Determina l'equació del lloc geomètric dels punts del pla tals que la distància al punt (2,0) és sempre la meitat de la distància a la recta $y = x - 8$

Sigui (x,y) un punt que formi part d'aquest lloc geomètric. Ha de verificar
$$\sqrt{(x-2)^2 + y^2} = \frac{1}{2} \frac{|-x + y + 8|}{\sqrt{2}}$$
si elevem al quadrat obtenim
$$(x-2)^2 + y^2 = \frac{(-x + y + 8)^2}{8}$$

19 Calcula m per tal que la recta d'equació y=x+m sigui tangent a l'el·lipse $x^2 + 2y^2 = 6$

Substituïm y a l'equació de l'el·lipse

$x^2 + 2(x+m)^2 = 6$

$x^2 + 2(x^2 + 2mx + m^2) = 6$

$3x^2 + 4mx + 2m^2 - 6 = 0$

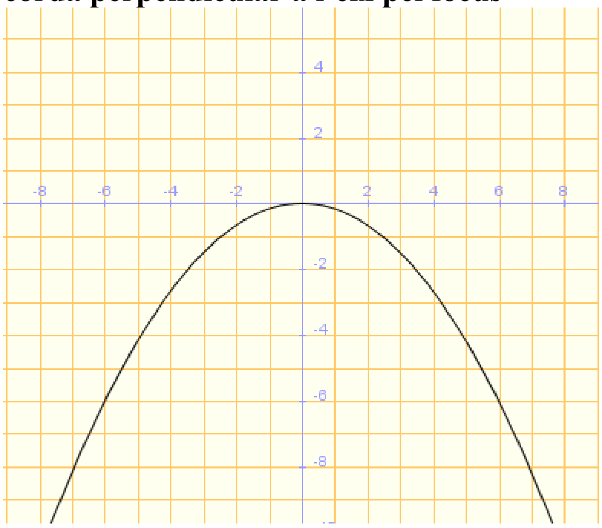
Aquesta equació de segon grau ha de tenir una única solució, el seu discriminant ha de ser zero

$\Delta = (4m)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (2m^2 - 6) = 16m^2 - 24m^2 + 72 = -8m^2 + 72 = 0$

té de solucions

$m^2 = 9 \Rightarrow m = \pm 3$

20 Dibuixa, de manera aproximada, la paràbola d'equació $x^2 = -6y$. Indica'n les coordenades del focus, les equacions de la directriu i de l'eix i la longitud de la corda perpendicular a l'eix pel focus



Les coordenades del focus són $F\left(0,-\frac{3}{2}\right)$, la directriu és $y = \frac{3}{2}$, l'eix $x = 0$

El punt intersecció de la paràbola amb la recta $y = -\frac{3}{2}$ és

$$\begin{cases} y = -\frac{3}{2} \\ x^2 = -6y \end{cases}$$

el punt $x = \pm 3$, la longitud de la corda és $3 \cdot 2 = 6$

21 Troba l'equació de l'el·lipse els focus de la qual són els punts (-6,0) i (6,0) sabent que la suma de les distàncies d'un punt qualsevol de l'el·lipse als focus és constant i igual a 20

Deduim que $c = 6$ i $a = 10$. El paràmetre b serà

$b^2 = a^2 - c^2 = 100 - 36 = 64 \quad \Rightarrow b = 8$

Aleshores l'equació és

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$$

22 Escriu l'equació de la hipèrbola centrada a l'origen de coordenades sabent que un dels seus focus és el punt (-6,0) i que el semieix real és 5

$c = 6$, $a = 5$. Calculem b

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 36 = 25 + b^2 \Rightarrow b^2 = 11$

l'equació és

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{11} = 1$$

23 Els focus d'una el·lipse centrada a l'origen de coordenades es troben situats a l'eix d'abscisses. Determina'n l'equació sabent que e=0,6 i b=8.

$e = 0{,}6 = \frac{c}{a}$ i $a^2 = b^2 + c^2 = 64 + c^2$

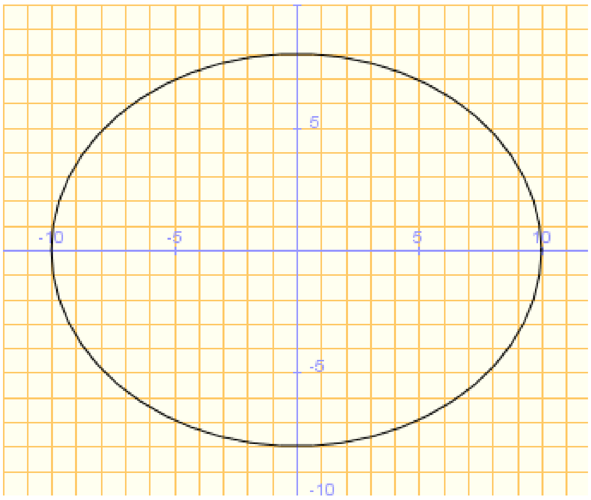
però com c=0,6a obtenim

$a^2 = 64 + (0{,}6a)^2 = 64 + 0{,}36a^2$

$0{,}64a^2 = 64 \Rightarrow a^2 = \frac{64}{0{,}64} = 100$

l'equació és

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$$



24 Identifica els focus i els vèrtexs de la hipèrbola d'equació $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$**. Calcula'n l'excentricitat**

De l'equació deduïm $a = \sqrt{144} = 12$ i $b = \sqrt{25} = 5$. Els vèrtexs són els punts (12,0) i (-12,0)

Calculem c

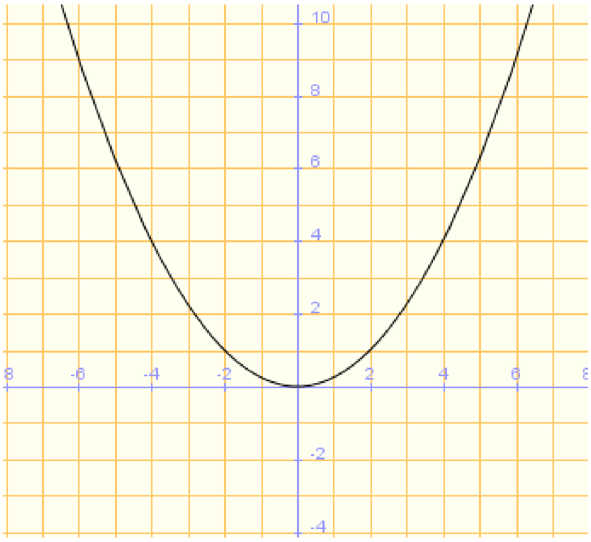
$c^2 = a^2 + b^2 = 144 + 25 = 169 \Rightarrow c = \sqrt{169} = 13$

Els focus són els punts (13,0) i (-13,0)

Excentricitat

$$e = \frac{c}{a} = \frac{13}{12}$$

25 Dibuixa la paràbola $y = \frac{x^2}{4}$ i determina'n el focus, l'equació de la directriu i el vèrtex



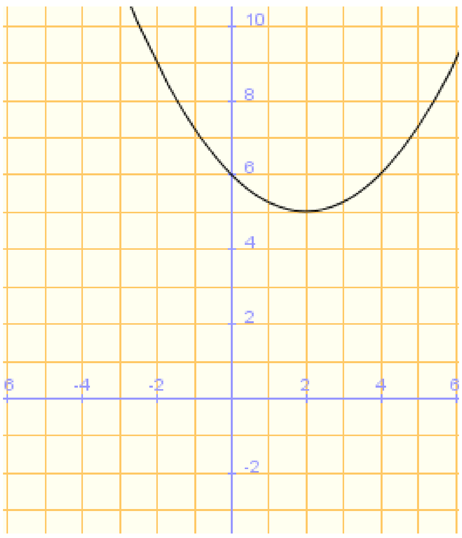
De $x^2 = 4y$ obtenim $p = 2$ i el focus és el punt (0,1). L'equació de la directriu és $y = -1$ i el vèrtex el punt (0,0)

26 Identifica el vèrtex de la paràbola d'equació $y = \frac{x^2}{4} - x + 6$. Relaciona el seu gràfic amb el de la paràbola de l'exercici anterior. Dóna'n el focus i la directriu

El vèrtex de la paràbola és el punt (2,5). Calculem

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{4}} = 2 \text{ i } f(2) = \frac{2^2}{4} - 2 + 6 = 5$$

El gràfic d'aquesta paràbola és el mateix que el de l'exercici anterior traslladant el vèrtex al punt (2,5). El focus és (2,6) i la directriu $y = 4$

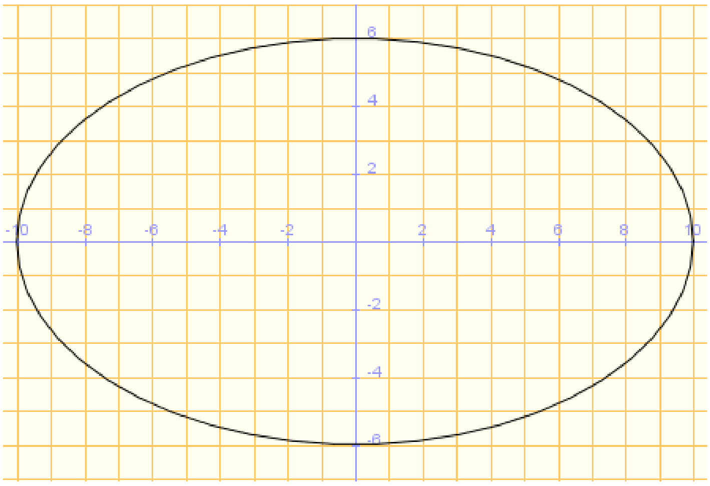


27 L'excentricitat d'una el·lipse és $e = \dfrac{4}{5}$. Escriu la seva equació sabent que $a = 10$. Representa-la gràficament

$$e = \frac{4}{5} = \frac{c}{a} = \frac{c}{10} \quad \Rightarrow c = \frac{40}{5} = 8$$

Calculem b fent servir $a^2 = b^2 + c^2 \quad \Rightarrow b^2 = 100 - 64 = 36$

L'equació és $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{36} = 1$



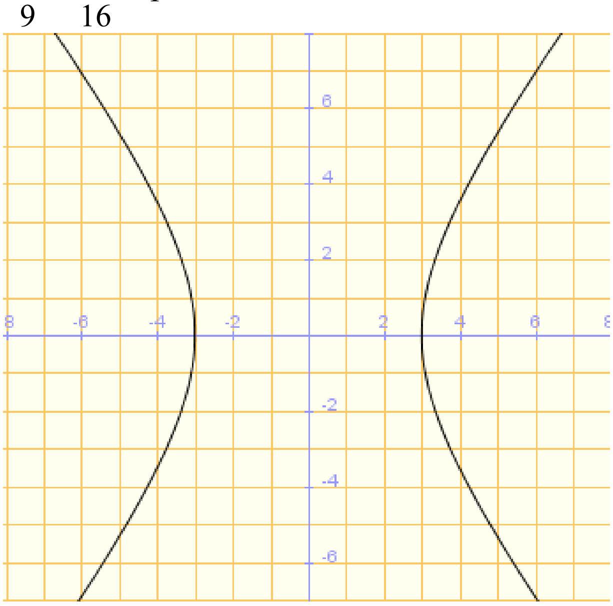
28 Dibuixa de manera aproximada una hipèrbola que tingui com a vèrtexs els punts A(0,3) i A'(0,-3) i un dels seus focus sigui (0,5). Escriu-ne l'equació

De les dades sabem que a=3 i c=5. Calculem b

$b^2 = a^2 - c^2 = 29 - 9 = 16$

L'equació és

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$$



31 La circumferència principal d'una el·lipse té d'equació $x^2+y^2=16$. Escriu l'equació de l'el·lipse sabent que $e=\frac{1}{2}$

El radi de la circumferència és 4 i coincideix amb el valor de a

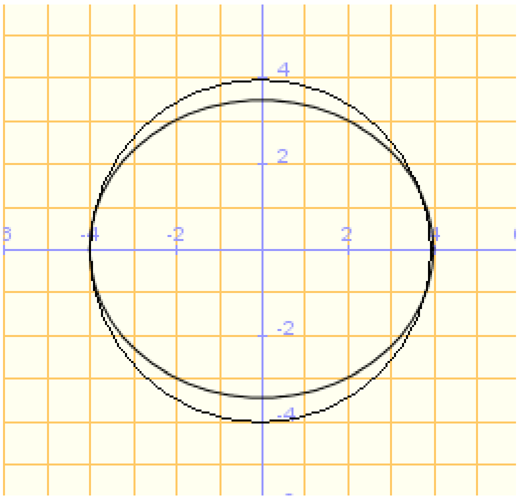
$e=\frac{1}{2}=\frac{c}{a}=\frac{c}{4}\Rightarrow c=2$

aleshores

$a^2=b^2+c^2 \quad \Rightarrow b^2=16-4=12$

I l'equació és

$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$



32 Considera l'el·lipse d'equació $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$. Representa-la gràficament i traça la recta perpendicular a l'eix de les abscisses per a un dels focus. Troba la longitud del segment d'aquesta recta determinat per la seva intersecció amb l'el·lipse

a=6 i b=3. Calculem c $a^2=b^2+c^2 \Rightarrow c^2=36-9=27\Rightarrow c=\sqrt{27}$

Els focus dóna els punts $\left(-\sqrt{27},0\right)$ i $\left(\sqrt{27},0\right)$. Si $x=\sqrt{27}$ el valor de y corresponent serà $\frac{27}{36}+\frac{y^2}{9}=1\Rightarrow y^2=\frac{9}{4}\Rightarrow y=\pm\frac{3}{2}$

La distància PP' és $2\cdot\frac{3}{2}=3$