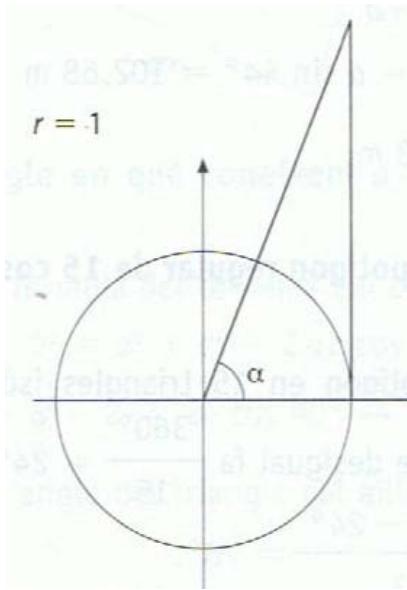


1 Un angle agut α és tal que $\tan \alpha = 3$. Representa'l a la circumferència unitat i troba $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$ sense utilitzar la calculadora

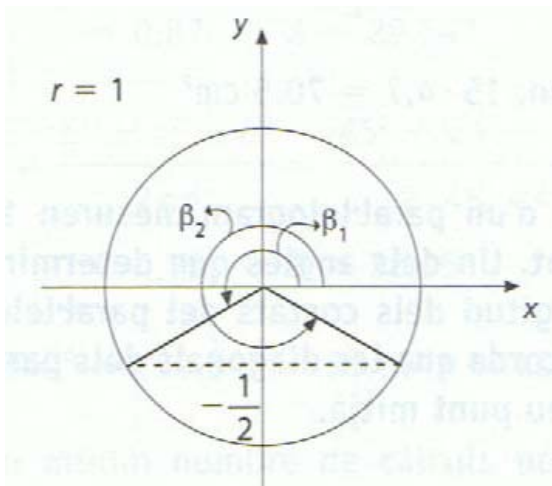


Si sabem que $\tan \alpha = 3 = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, podem aïllar una de les dues funcions trigonomètriques, per exemple $\sin \alpha = 3 \cos \alpha$. Substituint a l'equació fonamental $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow (3 \cos \alpha)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow 9 \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow$

$$10 \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{10} \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

i la funció sinus $\sin \alpha = 3 \cos \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

2 Representa tots els angles β positius més petits de 360° tals que $\sin \beta = -0,5$



3. Si $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ i $\cos \alpha = -0,8$, calcula $\sin \alpha$, $\tan \alpha$, $\cos(-\alpha)$, $\sin(-\alpha)$ i $\tan(-\alpha)$

L'angle α és del segon quadrant, aleshores té el sinus positiu i la tangent negativa
Plantegem

$$\sin^2 \alpha + (-0,8)^2 = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - 0,64 = 0,36 \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{0,36} = 0,6$$

$$\text{i la tangent } \tan \alpha = \frac{0,6}{-0,8} = -0,75$$

Per les propietats dels angles oposats

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha = -0,6$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha = -0,8$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha = 0,75$$

7 Demostra que $\sin 40^\circ + \sin 20^\circ = \cos 10^\circ$ aplicant la corresponent fórmula de transformació de suma en producte

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\sin 40 + \sin 20 = 2 \sin 30 \cos 10, \text{ conegut } \sin 30 = \frac{1}{2}, \text{ tenim}$$

$$\sin 40 + \sin 20 = 2 \sin 30 \cos 10 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cos 10 = \cos 10$$

9 Mirant des d'un cert punt veiem el terrat d'un gratacels sota un angle de 60° . Amb quin angle el veuríem des d'una distància doble de l'anterior?

$$\text{Sigui } h \text{ l'altura i } d \text{ la distància, tenim } \tan 60 = \frac{h}{d} \Rightarrow d = \frac{h}{\tan 60}$$

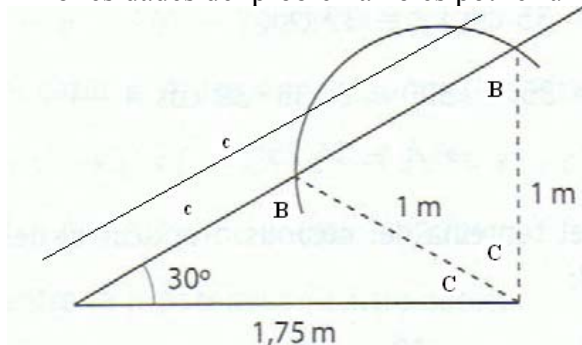
Sigui A l'angle quan ens allunyem a una distància doble $\tan A = \frac{h}{2d}$, si aïllem d i igualem els resultats obtenim

$$d = \frac{h}{\tan 60}; d = \frac{h}{2 \tan A} \Rightarrow \frac{h}{\tan 60} = \frac{h}{2 \tan A} \Rightarrow \tan A = \frac{\tan 60}{2}$$

L'angle A és, aproximadament, $A=40,89^\circ$

10 A un fuster li han encarregat un tauler triangular. Dos dels costats d'aquest triangle han de mesurar 1 m i 1,75 m i l'angle oposat al primer costat 30° . Té dades suficients el fuster per fer el tauler?. Raona la resposta.

Amb les dades del problema no es pot fer un únic tauler.



Apliquem el teorema del sinus i obtenim

$$\frac{1}{\sin 30} = \frac{1,75}{\sin B} \Rightarrow \sin B = 1,75 \sin 30 = 0,875$$

aleshores l'angle B té dues solucions

$$B = \begin{cases} 61^\circ \\ 119^\circ \end{cases}$$

Si $B=61^\circ$ $C=180-(61+30)=89^\circ$ i si $B=119^\circ$ $C=180-(119+30)=31^\circ$

si $C=89^\circ$ el tercer costat és

$$\frac{1}{\sin 30} = \frac{c}{\sin 89} \Rightarrow c = \frac{\sin 89}{\sin 30} = 1,99$$

i si $C=31^\circ$

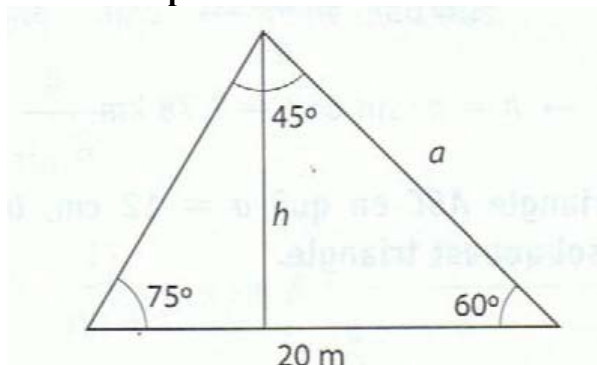
$$\frac{1}{\sin 30} = \frac{c}{\sin 31} \Rightarrow c = \frac{\sin 31}{\sin 30} = 0,717$$

11 El radar d'un vaixell detecta un objecte en direcció est a 8 km de distància i un altre objecte en direcció nord-est a 6 km. Quina distància separa els dos objectes?

Les dues direccions formen un angle de 45° . Cal calcular el costat d'un triangle oposat a l'angle de 45° i sabem que els altres dos són de 8 i 6. Plantegem el teorema del cosinus

$$a^2 = 6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cos 45 = 5,67 \text{ km}$$

12 Per fixar un pal a terra se'l subjecta mitjançant dos cables per dos punts separats 20 m. Els cables formen amb el terra angles de 75° i 60° . Determina l'altura del pal.



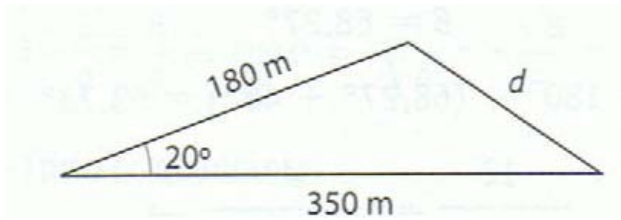
Fent servir el teorema del sinus

$$\frac{a}{\sin 75} = \frac{20}{\sin 45} \Rightarrow a = \frac{20 \sin 75}{\sin 45} = 27,32 \text{ m}$$

i calculem h a partir del triangle rectangle de la dreta

$$\sin 60 = \frac{h}{27,32} \Rightarrow h = 27,32 \sin 60 = 23,66 \text{ m}$$

13 Un jugador de golf colpeja la pilota des de la posició de sortida per tal d'introduir-la al forat, que es troba a 350 m. El cop no ha estat gaire precís i la pilota, que s'ha desviat 20° de la direcció correcta, només ha assolit una distància de 180 m. A quina distància del forat s'ha aturat la pilota?



Fem servir el teorema del cosinus i calculem d

$$d^2 = 180^2 + 350^2 - 2 \cdot 180 \cdot 350 \cdot \cos 20 = \\ = 191,05 m$$

14 Construeix un triangle de costats 10, 35 i 39 cm. Quant mesuren els seus angles?

Considerem $a=10$, $b=35$ i $c=39$. Apliquem el teorema del cosinus al costat a

$$10^2 = 35^2 + 39^2 - 2 \cdot 35 \cdot 39 \cdot \cos A \Rightarrow$$

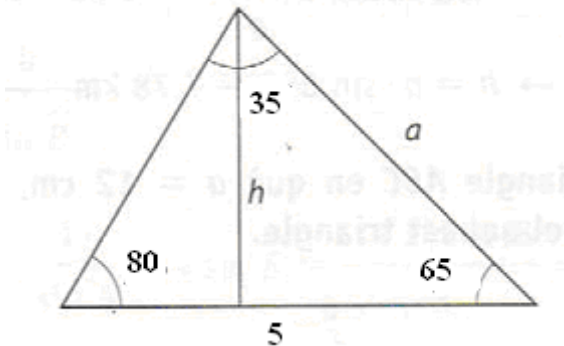
$$\cos A = \frac{10^2 - 35^2 - 39^2}{-2 \cdot 35 \cdot 39} = \frac{-2646}{-2730} = 0,96923 \Rightarrow A = 14,25^\circ$$

Podem repetir el teorema del cosinus o fer servir el teorema del sinus

$$\frac{10}{\sin 14,25} = \frac{35}{\sin B} \Rightarrow \sin B = \frac{35 \cdot \sin 14,25}{10} = 0,86154 \Rightarrow B = 59,49^\circ$$

$$\text{i l'angle } C = 180 - (A + B) = 106,26^\circ$$

15 Dues persones, separades una distància de 5 km, observen alhora un avió sota angles de 80° i 65° respectivament. Suposant que les persones i l'avió es troben en el mateix pla vertical, calcula l'altura a la que vola l'avió



$$\frac{a}{\sin 80} = \frac{5}{\sin 35} \Rightarrow a = 8,58 \text{ km}$$

$$\sin 65 = \frac{h}{a} = \frac{h}{8,58} \Rightarrow h = 8,58 \cdot \sin 65 = 7,78 \text{ km}$$

16 Dibuixa un triangle ABC en què $a=12$ cm, $b=15$ cm i $A=48^\circ$. Resol aquest triangle

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \frac{12}{\sin 48} = \frac{15}{\sin B} \Rightarrow \sin B = \frac{15 \sin 48}{12} = 0,92893 \Rightarrow B = \begin{cases} 68,27^\circ \\ 111,73^\circ \end{cases}$$

Si $B=68,27^\circ$, l'angle C serà

$$C = 180 - (A + B) = 63,73^\circ$$

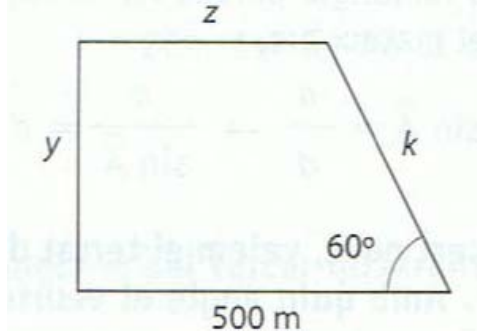
i el costat c

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{12}{\sin 48} = \frac{c}{\sin 63,73} \Rightarrow c = \frac{12 \sin 63,73}{\sin 48} = 14,48 \text{ cm}$$

Si ara és $B=111,73^\circ$, $C = 180 - (A + B) = 20,27^\circ$ i el costat c

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{12}{\sin 48} = \frac{c}{\sin 20,27} \Rightarrow c = \frac{12 \sin 20,27}{\sin 48} = 5,59 \text{ cm}$$

19 Una parcel·la de 6 ha té forma de trapezi rectangle. Un dels costats paral·lels del trapezi mesura 500 m i l'angle adjacent 60° . Calcula quants metres de tanca es necessiten per cercar la parcel·la

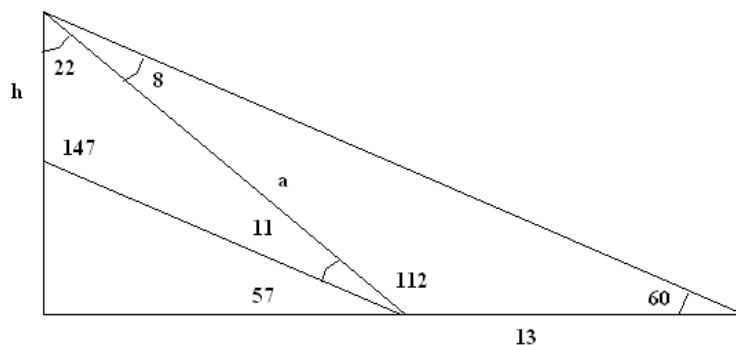


$6ha = 60.000m^2$. Podem plantejar

$$\begin{cases} 60000 = \frac{(500+z)y}{2} \\ \sin 60 = \frac{y}{k} \\ \cos 60 = \frac{500-z}{k} \end{cases}$$

Al resoldre el sistema obtenim $k=149,78$; $y=129,71$ i $z=425,11$ d'on el perímetre serà 1204,6 m

21 Una torre de telecomunicacions es troba situada a la part més alta d'una muntanya. Situats en una plataforma, l'extrem de l'antena es veu sota un angle de 60° . Si ens apropem 13 m, l'extrem de l'antena es veu sota un angle de 68° i, des d'aquest mateix punt, es veu la base de la torre sota un angle de 57° . Amb aquestes dades calcula l'alçada de la torre



$$\frac{13}{\sin 8} = \frac{a}{\sin 60} \Rightarrow a = \frac{13 \sin 60}{\sin 8} = 80,89 \text{ m}$$

$$\frac{h}{\sin 11} = \frac{80,89}{\sin 147} \Rightarrow h = \frac{80,89 \sin 11}{\sin 147} = 28,34 \text{ m}$$