1 Resol les equacions següents en el conjunt dels nombres complexos

$$x^2+2x+2=0$$
$$x=\frac{-2\pm\sqrt{4-8}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{-4}}{2}=\frac{-2\pm 2i}{2}=\begin{cases}-1+i\\-1-i\end{cases}$$
$$x^2-3x+6=0$$
$$x=\frac{3\pm\sqrt{9-24}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{-15}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{15}i}{2}=\begin{cases}\dfrac{3+\sqrt{15}i}{2}\\\dfrac{3-\sqrt{15}i}{2}\end{cases}$$
$$x^2+25=0$$
$$x^2=-25\Rightarrow x=\sqrt{-25}=\sqrt{25}i=\begin{cases}5i\\-5i\end{cases}$$

2 Donats els nombres complexos $z_1=2+(3+p)i$ i $z_2=-5+4i$, troba el valor de p sabent que la suma z_1+z_2 és un nombre real.

Si la suma és un nombre real, la part imaginària ha de ser zero. Calculem la suma
$z_1+z_2=2+(3+p)i-5+4i=-3+(3+p+4)i$
Si ha de ser $3+p+4=0\Rightarrow p=-7$

3 Calcula

$$\left(\frac{1}{3}+3i\right)-(3-i)+(2-5i)=\left(\frac{1}{3}-3+2\right)+(3+1-5)i=-\frac{2}{3}-i$$
$$10i-[(1+i)-(-3+4i)]=10i-(-3+4i)=3+6i$$

4 Comprova amb un exemple que quan se suma i quan es multiplica un nombre complex pel seu conjugat s'obté un nombre real

Fem-ho en general. Un nombre complex és de la forma a+bi, i el seu conjugat a-bi. Si calculem la suma serà
$(a+bi)+(a-bi)=2a$
que no té part imaginaria, aleshores és un real. Si els multipliquem
$(a+bi)\cdot(a-bi)=a^2-b^2i^2=a^2+b^2$
que també és un real

6 Calcula en forma binòmica

$$(2-i)^2=2^2-4i+i^2=4-4i-1=3-4i$$
$$(-2-3i)^2=(-2)^2+12i+(-3i)^2=4+12i+9i^2=4+12i-9=-5+12i$$
$$(-1-i)^2=(-1)^2+2i+(-i)^2=1+2i-1=2i$$

7 Efectua les operacions del numerador i del denominador en les expressions fraccionàries següents i després calcula'n el quocient

$$\frac{(4+7i)+(1-i)(2-i)}{(5+i)^2}=\frac{(4+7i)+(1-3i)}{24+10i}=\frac{5+4i}{24+10i}$$

per calcular el quocient multipliquem i dividim pel complex conjugat del denominador

$$\frac{5+4i}{24+10i}\cdot\frac{24-10i}{24-10i}=\frac{160+46i}{676}=\frac{40}{169}+\frac{23}{338}i$$

$$\frac{10-[(1-4i)-(2-3i)]}{3i+\left(2+\sqrt{3}i\right)\cdot\left(2-\sqrt{3}i\right)}=\frac{11+i}{3i+(4+3)}=\frac{11+i}{7+3i}$$

calculem el quocient com en el cas anterior

$$\frac{11+i}{7+3i}\cdot\frac{7-3i}{7-3i}=\frac{80-26i}{49+9}=\frac{80+26i}{58}=\frac{40}{29}-\frac{13}{29}i$$

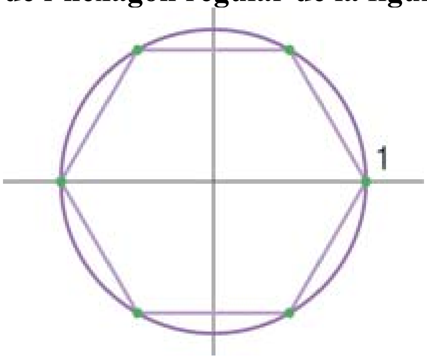
8 Demostra que si z és un nombre complex, el quocient $\frac{z-\bar{z}}{z+\bar{z}}$, en que $\bar{z}$ és el conjugat de z, és sempre un complex imaginari pur

Si $z=a+bi$ serà el seu conjugat $\bar{z}=a-bi$. Calculem

$$\frac{z-\bar{z}}{z+\bar{z}}=\frac{a+bi-(a-bi)}{a+bi+a+bi}=\frac{2bi}{2a}=\frac{b}{a}i$$

que és un imaginari pur.

9 Escriu en forma polar els nombres complexos que tenen per afixos els vèrtexs de l'hexàgon regular de la figura



Tots ells tenen mòdul 1 i argument múltiple de 60º, són $1_{60}, 1_{120}, 1_{180}, 1_{240}$ i 1_{300}

11 Donat el nombre complex 1_{60}, escriu-lo en forma binòmica. Troba'n l'oposat, el conjugat i l'invers

La part real és $1\cdot\cos 60=\frac{1}{2}$ i la part imaginària $1\cdot\sin 60=\frac{\sqrt{3}}{2}$. En forma binòmica és $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$, l'oposat $\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$, el conjugat $\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

L'invers serà el resultat de $\dfrac{1}{\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}$. Calculem el quocient multiplicant i dividint pel conjugat

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}=\frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{\frac{1}{4}-\frac{3}{4}i^2}=\frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{1}=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

12 Calcula $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^6$. Calcula primer la divisió i després la potència

La divisió és

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)\cdot\left(\frac{1-i}{1-i}\right)=\frac{1-2i+i^2}{1-i^2}=\frac{-2i}{2}=-i$$

i la potència

$$(-i)^6=i^6=i^2=-1$$

13 Comprova que la suma de les arrels vuitenes de la unitat dóna com a resultat zero

Primer calculem les arrels vuitenes de la unitat. El mòdul és $\sqrt[8]{1}=1$ i els arguments $\frac{0+360k}{8};\quad k=0,1,...,7$ que són 0, 45, 90, 135, 180, 225, 270 i 315.

Transformem els complexos en forma polar a binòmica

$1_0=1$

$1_{45}=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$

$1_{90}=i$

$1_{135}=-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$

$1_{180}=-1$

$1_{225}=-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i$

$1_{270}=-i$

$1_{315}=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i$

Si sumem tots els complexos el resultat és zero.

15 Determina el valor de la suma

$1+i+i^2+i^3+...+i^{125}$

Formem el grup $i+i^2+i^3+i^4=i-1-i+1=0$ que suma zero. A les 125 potències de i hi ha 31 grups d'aquests quatre elements i 1 més. Aleshores
$1+i+i^2+i^3+...+i^{125}=1+i^{125}=1+i$

16. Expressa en forma binòmica el resultat de la divisió $6_{120}:3_{30}$

Fent la divisió en forma polar $6_{120}:3_{30}=2_{90}$ i escrivint el resultat en forma binòmica
$2_{90}\rightarrow 2i$

17 Calcula el mòdul i l'argument de la tercera potència de $\sqrt{3}+i$

$(\sqrt{3}+i)^3=\left(\sqrt{3}\right)^3+3\cdot 3i+3\sqrt{3}\,i^2+i^3=3\sqrt{3}-3\sqrt{3}+9i-i=8i$
Aleshores el mòdul és 8 i l'argument 90, ja que és un imaginari pur
Si primer calculem el complex en forma polar
$\sqrt{3}+i\rightarrow r=2\quad \tan\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow\alpha=30^{\circ}$
en forma polar 2_{30}, si calculem la tercera potència
$\left(2_{30}\right)^3={2^3}_{3\cdot 30}=8_{90}$

18 Troba les arrels quartes de $z=8+8\sqrt{3}\,i$

Passem a forma polar. El mòdul és $r=\sqrt{64+64\cdot 3}=\sqrt{4\cdot 64}=2\cdot 8=16$. Calculem l'argument
$\tan\alpha=\dfrac{8\sqrt{3}}{8}=\sqrt{3}\quad\Rightarrow\quad\alpha=60^{\circ}$
Les arrels quartes tenen de mòdul $\sqrt[4]{16}=2$
i d'arguments
$\dfrac{60+360\cdot k}{4}$ k=0,1,2,3
$2_{15}, 2_{105}, 2_{195}, 2_{285}$

21 Troba les arrels cúbiques de -27**. Comprova que una d'aquestes arrels és el nombre real** -3

El nombre -27 en forma polar té mòdul 27 i argument 180º (és un real negatiu).
Les seves arrels cúbiques tenen de mòdul $\sqrt[3]{27}=3$ i els arguments
$\dfrac{180+360k}{3},\quad k=0,1,2$
són 60º, 180º i 300º. El complex 3_{180} és el real -3