1 Si A i B són dos esdeveniments tals que $P(A)=0{,}4$; $P(\overline{A}\cup\overline{B})=0{,}9$ i $P(A\cup B)=0{,}8$, A i B són incompatibles? Són independents?. Justifica ambdues respostes

$P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{A\cap B})=0{,}9 \Rightarrow P(A\cap B)=0{,}1$
Aleshores
$P(A\cap B)\neq 0$ i A i B no són incompatibles
$P(A\cup B)=0{,}8=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0{,}4+P(B)-0{,}1\Rightarrow$
$P(B)=0{,}8-0{,}4+0{,}1=0{,}5$
I $P(A\cap B)=0{,}1\neq P(A)\cdot P(B)=0{,}4\cdot 0{,}5=0{,}2$
aleshores A i B no són independents

2 Suposem que A i B són dos successos independents tals que la probabilitat que succeeixi algun dels dos és de 0,7 i la probabilitat que succeeixin tots dos alhora és de 0,2. Calcula P(A) i P(A)

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
$0{,}7=P(A)+P(B)-0{,}2$
$0{,}9=P(A)+P(B)$
a més a més, ja que són independents
$0{,}2=P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$
Plantegem el sistema

$$\begin{cases} P(A)+P(B)=0{,}9 \\ P(A)\cdot P(B)=0{,}2 \end{cases}$$

Les solucions són 0,4 i 0,5

3 Dels successos A i B sabem que $P(\overline{A}\cap\overline{B})=\frac{1}{5}$; $P(A)=\frac{2}{3}$ i $P(\overline{B})=\frac{3}{4}$. Calcula

$P(A\cup B)$	$P(A\cap B)$	$P(B/A)$
$P(A/B)$	$P(\overline{A}/B)$	$P(A/\overline{B})$

$$P(A\cup B)=1-P(\overline{A\cup B})=1-P(\overline{A}\cap\overline{B})=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$$

$$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=\frac{2}{3}+\frac{1}{4}-\frac{4}{5}=\frac{7}{60}$$

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{7}{60}}{\frac{2}{3}}=\frac{7}{40}$$

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{7}{60}}{\frac{1}{4}}=\frac{7}{15}$$

$$P(\overline{A}/B) = 1 - P(A/B) = 1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15}$$

$$P(A/\overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(\overline{B})} = \frac{\frac{2}{3} - \frac{7}{60}}{\frac{3}{4}} = \frac{11}{15}$$

4 Demostra que si A i B són dos successos independents, també ho són els successos $\overline{A}$ i $\overline{B}$.

Hem de demostrar que $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B})$

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] =$$

donat que A i B són independents es segueix

$$= 1 - P(A) - P(B) + P(A) \cdot P(B) = 1 - [1 - P(\overline{A})] - [1 - P(\overline{B})] + P(A) \cdot P(B) =$$

$$= 1 - [1 - P(\overline{A})] - [1 - P(\overline{B})] + [1 - P(\overline{A})] \cdot [1 - P(\overline{B})] =$$

$$= P(\overline{A}) - 1 + P(\overline{B}) + 1 - P(\overline{A}) - P(\overline{B}) + P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B})$$

5 Calcula la probabilitat que en llançar quatre vegades un mateix dau la suma dels punts obtinguts sigui diferent de 4 i de 24

La suma pot ser 4 només quan els resultats siguin {1,1,1,1} i la suma pot ser 24 només en el resultat {6,6,6,6}. La probabilitat de cada una d'aquestes sumes per separat és

$$P(suma\ 4) = P(suma\ 24) = \frac{1}{6^4} = \frac{1}{1296}$$

donats que els esdeveniments són incompatibles

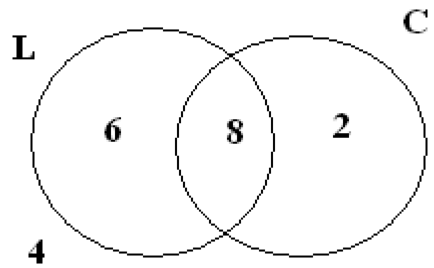
$$P(suma\ 4 \cup suma\ 24) = \frac{2}{1296} = \frac{1}{648}$$

i l'esdeveniment complementari

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{648} = \frac{647}{648}$$

6 En una sala en que hi ha 20 persones, 14 de les quals llegeixen el diari, 10 prenen cafè i 8 fan les dues coses. Si seleccionem dues persones a l'atzar, calcula la probabilitat que a) totes dues prenguin cafè i no llegeixin el diari. b) totes dues només facin una de les dues coses. c) cap d'elles no faci res. d) totes dues facin ambdues coses

Si representem les 20 persones obtenim



on L és l'esdeveniment llegir el diari i C prendre cafè
La probabilitat que dues persones prenguin cafè i no llegeixin el diari és

$$P(A)=\frac{2}{20}\cdot\frac{1}{19}=\frac{1}{190}$$

La probabilitat que totes dues només facin una de les dues coses la calculem considerant que poden llegir o prendre cafè. De les 20 hi ha 6+2=8 que només fan una sola cosa

$$P(A\ )=\frac{8}{20}\cdot\frac{7}{19}=\frac{56}{380}=\frac{14}{95}$$

Cap d'elles no faci res

$$P(A)=\frac{4}{20}\cdot\frac{3}{19}=\frac{12}{380}=\frac{3}{95}$$

Totes dues facin ambdues coses.

$$P(A)=\frac{8}{20}\cdot\frac{7}{19}=\frac{56}{380}=\frac{14}{95}$$

7 Determina la probabilitat d'obtenir a la Loteria primitiva 6 encerts, 5 encerts i el complementari, i 4 encerts jugant una sola combinació de 6 nombres

6 encerts $P(A)=\frac{1}{C_{49,6}}=\frac{1}{\binom{49}{6}}=\frac{1}{13983816}$

5 encerts i el complementari

$$P(A)=\frac{C_{6,5}}{C_{49,6}}=\frac{6}{13983816}=\frac{1}{2330636}$$

4 encerts

$$P(A)=\frac{C_{6,4}C_{43,2}}{C_{49,6}}=\frac{13545}{13983816}=\frac{645}{665896}$$

8 Calcula la probabilitat que en llançar un dau la suma dels punts de les cares visibles sigui més gran que 18

Hi ha 6 casos i en cada un hi ha 5 cares visibles i una que no ho és. Si la cara no visible és 1, la resta 2+3+4+5+6=20, si la cara no visible és 2, la suma de les altres que són visibles és 1+3+4+5+6=19 i si la cara no visible és 3, les visibles ja no superen la suma de 18 ja que 1+2+4+5+6=18

Aleshores la probabilitat demanada és $P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

9 D'una caixa que conté 5 boles numerades de l'1 al 5 a) Extraiem una bola rera l'altra fins a treure-les totes. Quina probabilitat tenim que surtin en l'ordre natura? b) S'extreu una bola i es retorna a la caixa i es repeteix això cinc vegades. Quina és ara la probabilitat que surtin en l'ordre natural? Quina probabilitat hi ha que surti les cinc vegades la mateixa bola?

Les cinc boles poden sortir, una rera l'altra, de $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ maneres diferents, només una és l'ordre natural . La probabilitat és $\frac{1}{120}$

Si les boles retornen, les diferents maneres de treure cinc boles és $5^5 = 3125$. La probabilitat demanda és $\frac{1}{3125}$

La primera bola pot ser una qualsevol, les quatre que la segueixen han de ser iguales que la primera. La probabilitat és $\frac{1}{5^4} = \frac{1}{625}$

11 Un estudiant s'ha preparat 22 temes d'un programa compost de 30 temes, dels quals surten 3 per sorteig. Calcula la probabilitat que a) respongui correctament dos temes b) no respongui correctament cap dels tres

$$P(A) = 3 \cdot \frac{22}{30} \cdot \frac{21}{29} \cdot \frac{8}{28} = \frac{66}{145}$$
$$P(B) = \frac{8}{30} \cdot \frac{7}{29} \cdot \frac{6}{28} = \frac{2}{145}$$

12 Quan llancem dos daus a) quina probabilitat hi ha d'obtenir un nombre de punts la suma dels quals sigui 9? I que la suma sigui múltiple de 3? b) Si en llançar dos daus ha sortit un nombre de punts la suma dels quals és un múltiple de 3, calcula la probabilitat que la suma sigui 9

Els 36 possibles resultats del llançament de dos daus, i la suma dels punts corresponents la tenim a la taula

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

La suma 9 es dóna en 4 dels 36 casos possibles, la probabilitat és

$$P(suma\ 9) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

A la taula hi ha 12 resultats múltiples de 3

$$P(múltiple\ de\ 3) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

La probabilitat condicionada que ens demanen és

$$P(suma\ 9 / múltiple\ de\ 3) = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

13 En una facultat universitària el 25% dels estudiants ha suspès les Matemàtiques, el 15% ha suspès la Química i el 10% ha suspès totes dues assignatures. Si seleccionem un alumne a l'atzar, determina la probabilitat que

a) suspengui les Matemàtiques si ha suspès la Química. b) suspengui la Química si ha suspès les Matemàtiques. c) suspengui les Matemàtiques o la Química

Sabem que $P(M) = 0{,}25$, $P(Q) = 0{,}15$ i $P(M \cap Q) = 0{,}1$ on indiquem per M i Q els esdeveniments de suspendre Matemàtiques i Química
Podem calcular
$P(M \cup Q) = P(M) + P(Q) - P(M \cap Q) = 0{,}25 + 0{,}15 - 0{,}1 = 0{,}3$
$P(M / Q) = \frac{P(M \cap Q)}{P(Q)} = \frac{0{,}1}{0{,}15} = 0{,}666$
$P(Q / M) = \frac{P(M \cap Q)}{P(M)} = \frac{0{,}1}{025} = 0{,}4$

14 Un automòbil, abans de sortir al mercat, se sotmet a tres controls de qualitat: mecànic, elèctric i de planxa. La probabilitat que fallin els controls és, respectivament, 0,02; 0,01 i 0,07. Si la fàbrica treu al mercat 500 cotxes cada any, quants automòbils sortiran amb algun defecte?

Les probabilitats de fallar un control són
$P(M) = 0{,}02 \quad P(E) = 0{,}01 \quad P(X) = 0{,}07$
i les de no fallar cada un d'aquests controls
$P(\overline{M}) = 0{,}98 \quad P(\overline{E}) = 0{,}99 \quad P(\overline{X}) = 0{,}93$
La probabilitat que un automòbil no tingui cap defecte és
$P(\overline{M}).P(\overline{E}).P(\overline{X}) = 0{,}98 \cdot 0{,}99 \cdot 0{,}93 = 0{,}941094$
Dels 500 cotxes, el que no tindran cap defecte
$500 \cdot 0{,}941094 = 48{,}857 \approx 48$

16 Un ordinador personal està contaminat per un virus i està carregat amb dos programes antivirus P_1 i P_2 que actuen independentment l'un després de l'altre. El programa P_1 detecta la presència de virus amb una probabilitat de 0,9 i el programa P_2 amb una probabilitat de 0,8. Quina probabilitat hi ha que no es detecti el virus?

No serà detectat si fallen els dos programes, cada un d'ells té una probabilitat de fallar de $P(\overline{A}) = 0{,}1$ i de $P(\overline{B}) = 0{,}2$. La probabilitat de no detecta-ho és
$P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}02$

17 Disposem de dues caixes A i B. La caixa A conté 4 boles blanques i 2 boles negres i la caixa B 3 boles blanques i 5 boles negres. Escollim una caixa a l'atzar i traiem una bola, a continuació la introduïm a la caixa no escollida i traiem una altra bola d'aquesta caixa. Calcula la probabilitat que a) la segona bola sigui negra. b) la primera sigui negra i la segona blanca. c) totes dues boles siguin blanques.

Podem arribar a l'esdeveniment "segona bola negra" de qualsevol de les dues caixes i traient de cada una una primera bola de qualsevol color. Siguin A i B els esdeveniments d'escollir la caixa A o B, i siguin b_1, n_1, b_2, n_2 els esdeveniments respectius de treure bola blanca o negra de la primera o de la segona caixa

$$p(n_2) = P(A)\cdot P(b_1)\cdot P(n_2) + P(A)\cdot P(n_1)\cdot P(n_2) + P(B)\cdot P(b_1)\cdot P(n_2) + P(B)\cdot P(n_1)\cdot P(n_2) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{4}{6}\frac{5}{9} + \frac{1}{2}\frac{2}{6}\frac{6}{9} + \frac{1}{2}\frac{3}{8}\frac{2}{7} + \frac{1}{2}\frac{5}{8}\frac{3}{7} = \frac{209}{432}$$

$$P(n_1 \cap b_2) = P(A)P(n_1)P(b_2) + P(B)P(n_1)P(b_2) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2}{6}\frac{3}{9} + \frac{1}{2}\frac{5}{8}\frac{4}{7} = \frac{59}{252}$$

$$P(b_1 \cap b_2) = P(A)P(b_1)P(b_2) + P(A)P(b_1)P(b_2) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{4}{6}\frac{4}{9} + \frac{1}{2}\frac{3}{8}\frac{5}{7} = \frac{853}{3024}$$

18 Es realitza un sorteig entre tres alumnes. Per establir-ne el guanyador, s'escriu en un paper la paraula *premi* i es deixen dos paperets en blanc. Què és preferible, escollir primer, segon o tercer?

La probabilitat que el premi sigui del primer a escollir és $P(1) = \frac{1}{3}$

El segon traurà el premi si el primer no el treu i ell treu la papereta del premi, la probabilitat és $P(2) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ igual a la del primer

Per acabar, si el guanyador és del tercer a escollir, abans no han de treure el premi els dos anteriors. La probabilitat podem calcular-la

$$P(3) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{3}$$

i també és igual a les anteriors

19 a) Calcula la probabilitat que la suma dels punts obtinguts sigui 4 quan llancen un dau, quan en llancem 2, quan en llancem 3 i quan en llancem 4. b) Un senyor ha llançat un nombre desconegut de daus, entre 1 i 4, i la suma dels punts ha estat 4. Quina probabilitat hi ha que hagi llançat dos daus?

En llançar un dau $P(1) = \frac{1}{6}$, en llançar dos daus $P(2) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$, hi ha 36 casos possibles i tres de favorables 1+2, 2+2 i 2+1

Quan llancem tres daus els casos que poden donar una suma de quatre punts són 1+1+2, 1+2+1, 2+1+1 de $6^3 = 216$ possibles, la probabilitat és $P(3) = \frac{3}{216} = \frac{1}{72}$. Si llancem quatre daus la suma és 4 només en el cas de treure quatre uns. Els casos possibles són $6^4 = 1296$ i la probabilitat $P(4) = \frac{1}{1296}$

La probabilitat d'obtenir suma 4 en 1, 2, 3 o 4 llançaments és

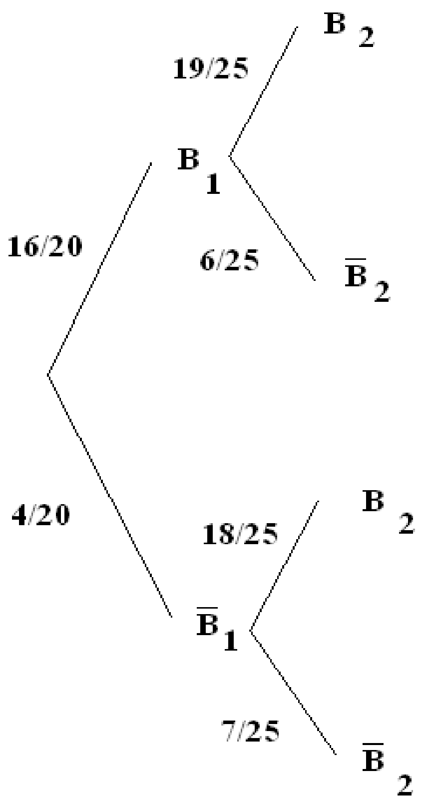
$$P(S4) = P(1) + P(2) + P(3) + P(4) = \frac{343}{1296}$$

Si la suma ha estat 4, la probabilitat d'haver fet dos llançaments és

$$P(2/S4)=\frac{P(S4\cap 2)}{P(S4)}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{346}{1296}}=\frac{108}{343}$$

20 D'una cistella en que hi ha 20 pomes, 4 de les quals estan macades, en cau una en una altra cistella en que hi havia 6 pomes macades i 18 en bon estat. Escollim una poma de la segona cistella i no està macada. Quina probabilitat hi ha que la poma que ha caigut de la primera cistella fos bona?

$$P(B1/B2)=\frac{P(B1)\cdot P(B2/B1)}{P(B2)}=\frac{\frac{4}{5}\cdot\frac{19}{25}}{\frac{4}{5}\cdot\frac{19}{25}+\frac{1}{5}\cdot\frac{18}{25}}=\frac{\frac{76}{125}}{\frac{94}{125}}=\frac{76}{94}=\frac{38}{47}$$



21 En un institut el 65% dels alumnes són noies. El 10% dels nois no practica cap esport, mentre que el 70% de les noies fa esport. Escollim un o una alumne/a a l'atzar i resulta que fa esport. Quina probabilitat hi ha que sigui noia? I que sigui noi si no fa esport?

Anomenem els esdeveniments H, D com noi i noia i S fer esport

$$P(D/S)=\frac{P(D)\cdot P(S/D)}{P(S)}=\frac{P(D)\cdot P(S/D)}{P(D)P(S/D)+P(H)P(S/H)}=$$

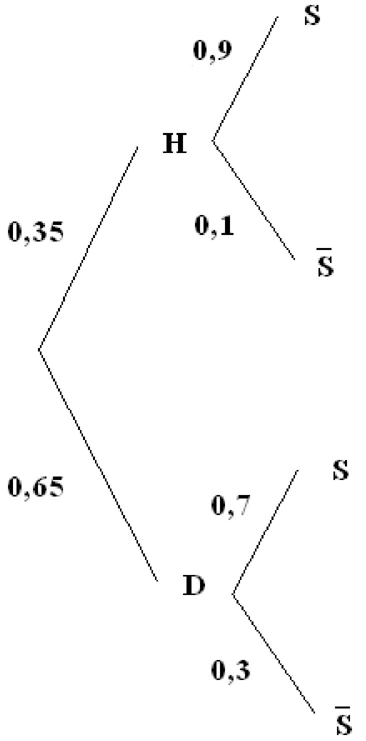
$$\frac{0{,}65\cdot 0{,}7}{0{,}65\cdot 0{,}7+0{,}35\cdot 0{,}9}=0{,}590$$

La probabilitat que sigui noi si no fa esport és

$$P(H/\overline{S})=\frac{P(H)\cdot P(\overline{S}/H)}{P(\overline{S})}=\frac{P(H)\cdot P(\overline{S}/H)}{P(H)\cdot P(\overline{S}/H)+P(D)\cdot P(\overline{S}/D)}=$$

$$=\frac{0{,}35\cdot 0{,}1}{0{,}35\cdot 0{,}1+0{,}65\cdot 0{,}3}=0{,}152$$

Que podem representar



22 Disposem de tres monedes. La primera té dues cares, a la segona la probabilitat de sortir cara i de sortir creu és la mateixa, i a la tercera la probabilitat que surti cara és del 30%. S'escull una d'aquestes tres monedes a l'atzar i es llança enlaire. Sabent que ha sortit cara calcula la probabilitat que la moneda escollida hagi estat la primera

$$P(1/C)=\frac{P(1)\cdot P(C/1)}{P(C)}=\frac{P(1)\cdot P(C/1)}{P(1)\cdot P(C/1)+P(2)\cdot P(C/2)+P(3)\cdot P(C/3)}=$$

$$=\frac{\frac{1}{3}\cdot 1}{\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{10}}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{5}}=\frac{5}{9}$$