1 Aplicant la definició, calcula la derivada de cadascuna de les funcions següents en $x = -3$

$f(x) = -x^2 + 1$	$f(x) = \sqrt{1-x}$	$f(x) = \dfrac{1}{x}$

$$f'(-3) = \lim_{h\to 0} \frac{-(-3+h)^2 + 1 - (-8)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-9 + 6h - h^2 + 1 + 8}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(6-h)}{h} = \lim_{h\to 0}(6-h) = 6$$

$$f'(-3) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1-(-3+h)} - \sqrt{1-(-3)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{4-h} - 2}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{4-h} - 2)(\sqrt{4-h} + 2)}{h(\sqrt{4-h} + 2)} = \lim_{h\to 0} \frac{4-h-4}{h(\sqrt{4-h} + 2)} = -\frac{1}{4}$$

$$f'(-3) = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{-3+h} - \dfrac{1}{-3}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{3-3+h}{3(-3+h)}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h}{3h(-3+h)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{3(-3+h)} = -\frac{1}{9}$$

2 Donada la funció $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$, és possible calcular $f'(2)$ ¿ Per què?

No es pot calcular $f'(2)$ ja que 2 no forma part del domini de la funció

3 Sense fer cap representació gràfica, indica si la funció $f(x) = (x-4)^2$ és creixent o decreixent en x=3,5

Calculem la derivada de la funció
$f(x) = (x-4)^2 = x^2 - 8x + 16$
$f'(x) = 2x - 8$
el valor de la derivada quan x=3,5 és
$f'(x = 3{,}5) = 2 \cdot 3{,}5 - 8 = 7 - 8 = -1 < 0$
La derivada és negativa, la funció és decreixent

5 Compara la rapidesa del creixement de la funció $f(x) = x^3 + 2x$ en els punts d'abscisses x=-2 i x=2

La derivada de la funció és $f'(x) = 3x^2 + 2$, els valors en els punts demanats
$f'(x = -2) = 14$
$f'(x = 2) = 14$
coincideixen. La funció és creixent amb la mateixa rapidesa

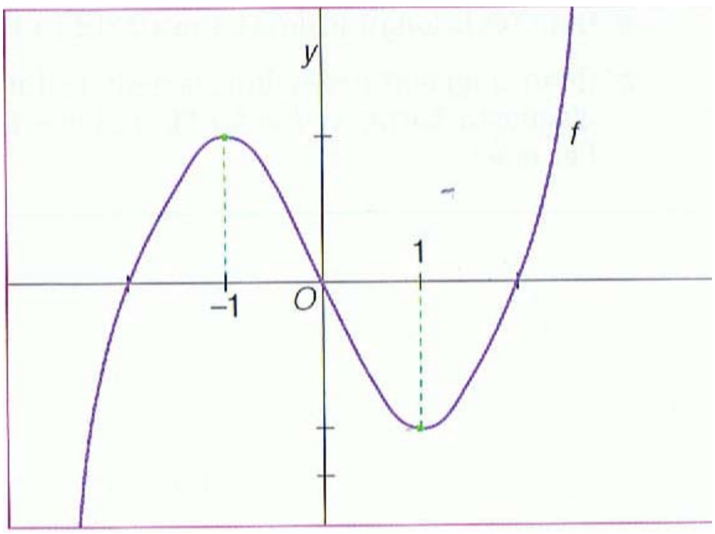
6 Aplicant la definició calcula les derivades de

$f(x) = x^3 + 3$	$f(x) = x + 3x^2$	$f(x) = 5\sqrt{x}$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3+3-(x^3+3)}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3+3-x^3-3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}3x^2+3xh+h^2=3x^2$$
$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)+3(x+h)^2-(x+3x^2)}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{x+h+3x^2+6xh+3h^2-x-3x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h+6xh+3h^2}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}1+6x+3h=1+6x$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{5\sqrt{x+h}-5\sqrt{x}}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{5\sqrt{x+h}-5\sqrt{x}}{h}\cdot\frac{5\sqrt{x+h}+5\sqrt{x}}{5\sqrt{x+h}+5\sqrt{x}}=\lim_{h\to 0}\frac{25x+25h-25x}{h(5\sqrt{x+h}+5\sqrt{x})}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{25}{5\sqrt{x+h}+5\sqrt{x}}=\frac{25}{10\sqrt{x}}=\frac{5}{2\sqrt{x}}$$

7 Indica raonadament el signe de la funció f'(x) corresponent a la funció f(x) representada en la gràfica de la figura en cadascun dels intervals següents $(-\infty,1),(-1,1),(1,+\infty)$



En $(-\infty,-1)$ la funció és creixent, aleshores $f'(x)>0$
En $(-1,1)$ la funció és decreixent, aleshores $f'(x)<0$
En $(1,+\infty)$ la funció és creixent, aleshores $f'(x)>0$

8 Indica els intervals de creixement i decreixement de la funció $f(x)=-3x+5$. Verifica la teva resposta fent-ne la representació gràfica

La derivada de la funció $f(x) = -3x + 5$ és $f'(x) = -3 < 0$ sempre negativa, el que vol dir que la funció és decreixent sempre
La funció $f(x) = -3x + 5$ és una recta de pendent negativa

9 Calcula la funció derivada de cadascuna de les funcions següents

$f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 1$	$f(x) = \sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^2}$
$f(x) = 1 - \dfrac{2}{x^2}$	$f(x) = 3(x^2 + 7x - 12)$
$f(x) = \sqrt{5x}$	$f(x) = (2 - 6x)^2$

$f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 1$
$f'(x) = 8x^3 - 6x$

$f(x) = \sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{2}{3}}$
$f'(x) = \dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + \dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{3\sqrt{x}}{2} + \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

$f(x) = 1 - \dfrac{2}{x^2} = 1 - 2x^{-2}$
$f'(x) = 0 - 4x^{-3} = -\dfrac{4}{x^3}$

$f(x) = 3(x^2 + 7x - 12) = 3x^2 + 21x - 36$
$f'(x) = 6x + 21$

$f(x) = \sqrt{5x} = \sqrt{5}\sqrt{x} = \sqrt{5}x^{\frac{1}{2}}$
$f'(x) = \sqrt{5}\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{x}}$

$f(x) = (2 - 6x)^2 = 4 - 24x + 36x^2$
$f'(x) = -24 + 72x$

10 Per a un determinat mòbil, la distància d en metres a un punt de referència en funció del temps t en segons, ve donada per l'expressió
$d = f(t) = 10t - 2t^2$
a) Troba l'expressió algèbrica que et permeti calcular la velocitat d'aquest mòbil en qualsevol instant b) Indica a quina distància del punt de referència es troba quan canvia el sentit del moviment. c) Interpreta físicament el signe de la velocitat per a t>2,5 s

La velocitat és la derivada de la posició
$v = f'(t) = 10 - 4t$
Demanem que la velocitat sigui 0

$0 = 10 - 4t \Rightarrow \quad t = 2{,}5$

per a aquest valor de t la posició del mòbil és

$d = f(2{,}5) = 10 \cdot 2{,}5 - 2(2{,}5)^2 = 12{,}5\ m$

Quan t>2,5 és v<0 i el mòbil es mou en sentit negatiu

11 A conseqüència de la dilatació, la longitud L d'una barra metàl·lica augmenta amb la temperatura T d'acord amb l'expressió

$L = 8(1 + 10^{-4}T)$

On L s'expressa en centímetres i T en graus centígrads. a) Quina és la longitud de la barra a 0ºC i a 100ºC? b) Quan augmenta més bruscament la longitud d'aquesta barra, si T=50º o si T=80º

$L(0) = 8\ cm$

$L(100) = 8(1 + 10^{-4} \cdot 100) = 8{,}08\ cm$

La derivada de la funció és

$L' = 8 \cdot 10^{-4}$

i aquesta derivada és constant, no depèn de la variable T. Aleshores augmenta sempre amb la mateixa rapidesa

12 Representa gràficament les funcions $f(x) = 2x + 3$ i $g(x) = 2x - 3$. Què obtens? Quina de les dues funcions creix més de pressa al voltant de x=0? I al voltant de x=10? Procura respondre a les dues últimes qüestions sense fer cap càlcul i argumenta'n la resposta

Les gràfiques són de dues rectes paral·leles, ja que tenen el mateix pendent

El pendent de les dues rectes és 2, el valor de la derivada de les dues funcions. Creixen amb la mateixa rapidesa independentment del valor de x