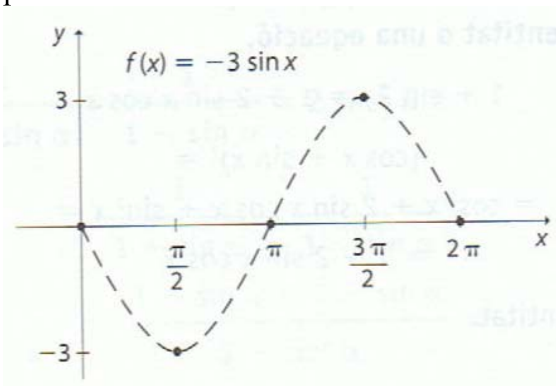
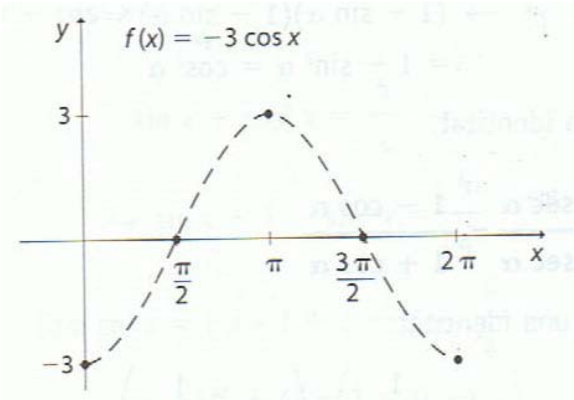
2 Dibuixa la gràfica de les funcions següents. Per a cada funció, especifica'n el domini, el recorregut i el període

$y=-3\sin x$ $\qquad$ $y=-3\cos x$ $\qquad$ $y=\tan x+2$ $\qquad$ $y=ctnx+1$

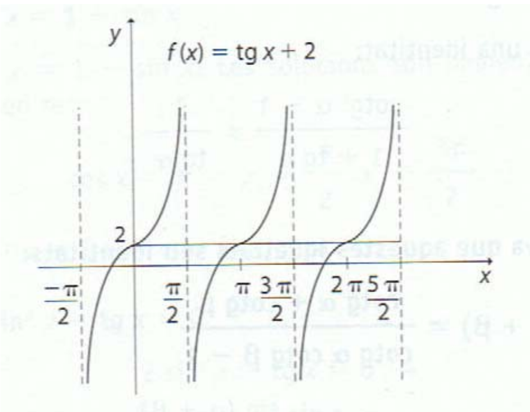
La funció $y=-3\sin x$ té de domini tots els Reals, el recorregut és $[-3,3]$ i el període 2π, la segona funció $y=-3\cos x$ té el mateix domini, el mateix recorregut i el mateix període





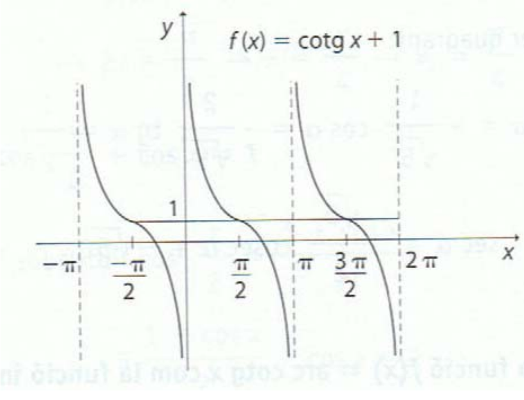
La funció $y=\tan x+2$ té de recorregut tots els nombres Reals, de període π i el domini hem d'excloure dels Reals els valors $\pm\frac{\pi}{2},\pm\frac{3\pi}{2},\pm\frac{5\pi}{2},\ldots$, en general el domini és

$$\Re-\left\{x=\frac{(2k+1)\pi}{2};\, k\in Z\right\}$$



La funció $y=ctnx+1$ té de recorregut tots els nombres Reals, de període π i de domini hem d'excloure els múltiples de π

$$\Re-\{x=k\pi;\, k\in Z\}$$



3 Considera la funció $f(x) = -\tan x$. Troba els límits laterals en els valors de x de l'interval $[-\pi, \pi]$ en què la funció és discontínua

La funció és discontínua en els punts $x = \pm\frac{\pi}{2}$. Els límits laterals en aquests punts són

$\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}^-} -\tan x = -\infty \quad \lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} -\tan x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} -\tan x = -\infty \quad \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} -\tan x = +\infty$

4 El període de la funció $f(x) = \cos kx$ és $\frac{\pi}{2}$. Calcula k

Si el període de la funció $f(x) = \cos x$ és 2π, el període de la funció $f(x) = \cos kx$ serà

$$\frac{2\pi}{k} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow k = 4$$

7 Resol aquestes equacions trigonomètriques

$\cos x = -1$

$\tan x = \sqrt{3}$

$\cot anx = -1$

$\sec x = 1$

$\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi$

$\tan x = \sqrt{3} \Rightarrow x = \begin{cases} \pi/3 \\ 4\pi/3 \end{cases}$

$\cot anx = -1 \Rightarrow \tan x = -1 \Rightarrow x = \begin{cases} 3\pi/4 \\ 7\pi/4 \end{cases}$

$\sec x = 1 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow x = 0$

8 Esbrina si la igualtat $1 + \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2$ és una identitat o una equació

És una identitat ja que si recordem que $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ obtenim
$(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = 1 + 2\sin x \cos x = 1 + \sin 2x$

11 Resol les equacions trigonomètriques següents

$\sin x + \cos^2 x = \frac{5}{4}$

$\cos x = 1 - \sin x$

$2\sin^2 x - \tan x = 0$

$6\cos^2 \frac{x}{2} + \cos x = 1$

$\sin x + \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\frac{ctgx + \tan x}{ctgx - \tan x} = 2$

$\begin{cases} 3\sin x + \cos y = 2 \\ \sin x - 3\cos y = -1 \end{cases}$

$\sin x + \cos^2 x = \frac{5}{4}$

Fem el canvi de $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ i obtenim

$\sin x + 1 - \sin^2 x = \frac{5}{4} \Rightarrow 0 = \frac{1}{4} - \sin x + \sin^2 x$

que és una equació de segon grau, si $\sin x = t$ l'equació queda

$t^2 - t + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow t = \frac{1 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{1}{2}$

si $\sin x = t = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow x = \begin{cases} \pi/6 \\ 5\pi/6 \end{cases}$

$\cos x = 1 - \sin x$

Té de solucions

$\cos x = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} \pi/2 \\ 3\pi/2 \end{cases}$

i també $\sin x = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}$

$2\sin^2 x - \tan x = 0$

$2\sin^2 x - \frac{\sin x}{\cos x} = 0 \Rightarrow \sin x\left(2\sin x - \frac{1}{\cos x}\right) = 0$

que dóna les opcions

$\sin x = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}$

i

$2\sin x - \frac{1}{\cos x} = 0 \Rightarrow 2\sin x \cos x = 1 \Rightarrow \sin 2x = 1$

Aleshores $2x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$

$6\cos^2 \frac{x}{2} + \cos x = 1$

Fem servir que $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$ i tenim

$6\left(\frac{1 + \cos x}{2}\right) + \cos x = 1 \quad \Rightarrow 3 + 3\cos x + \cos x = 1 \Rightarrow 4\cos x = -2 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$

d'on $x = \begin{cases} 2\pi/3 \\ 4\pi/3 \end{cases}$

$\sin x + \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Fem el canvi $\cos x = \pm\sqrt{1 - \sin^2 x}$

$\sin x \pm \sqrt{1 - \cos^2 x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \pm\sqrt{1 - \cos^2 x} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \sin x$

elevem al quadrat

$$1-\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{2}{\sqrt{2}}\sin x + \sin^2 x \Rightarrow$$

$$2\sin^2 x - \frac{2}{\sqrt{2}}\sin x - \frac{1}{2} = 0$$

Fem el canvi $\sin x = t$ i resolem l'equació de segon grau

$$2t^2 - \frac{2}{\sqrt{2}}t - \frac{1}{2} = 0 \quad \Rightarrow t = \frac{\frac{2}{\sqrt{2}} \pm \sqrt{6}}{4}$$

Fem servir valors aproximats

$$\sin x = 0{,}966 \Rightarrow x = \begin{cases} 1{,}3\ rad \\ 1{,}84\ rad \end{cases}$$

$$\sin x = -0{,}26 \Rightarrow x = \begin{cases} 3{,}4\ rad \\ 6{,}02\ rad \end{cases}$$

$$\frac{ctgx + \tan x}{ctgx - \tan x} = 2$$

Multipliquem per $\tan x$ el numerador i el denominador de la fracció

$$1+\tan^2 x = 2\left(1-\tan^2 x\right) \Rightarrow 1+\tan^2 x = 2 - 2\tan^2 x \Rightarrow \tan^2 x = \frac{1}{3}$$

Si $\tan x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ obtenim de resultats

$$x = \frac{\pi}{6};\ x = \frac{5\pi}{6}; \quad x = \frac{7\pi}{6};\ x = \frac{11\pi}{6}$$

$$\begin{cases} 3\sin x + \cos y = 2 \\ \sin x - 3\cos y = -1 \end{cases}$$

Resolem el sistema per reducció. Multipliquem per 3 la primera de les equacions i sumem

$$\begin{cases} 9\sin x + 3\cos y = 6 \\ \sin x - 3\cos y = -1 \end{cases} \rightarrow 10\sin x = 5 \rightarrow \sin x = \frac{1}{2}$$

obtenim

$$\cos y = 2 - 3\sin x = 2 - 3\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

de $\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \begin{cases} \pi/6 \\ 5\pi/6 \end{cases}$

i de $\cos y = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \begin{cases} \pi/3 \\ 5\pi/3 \end{cases}$