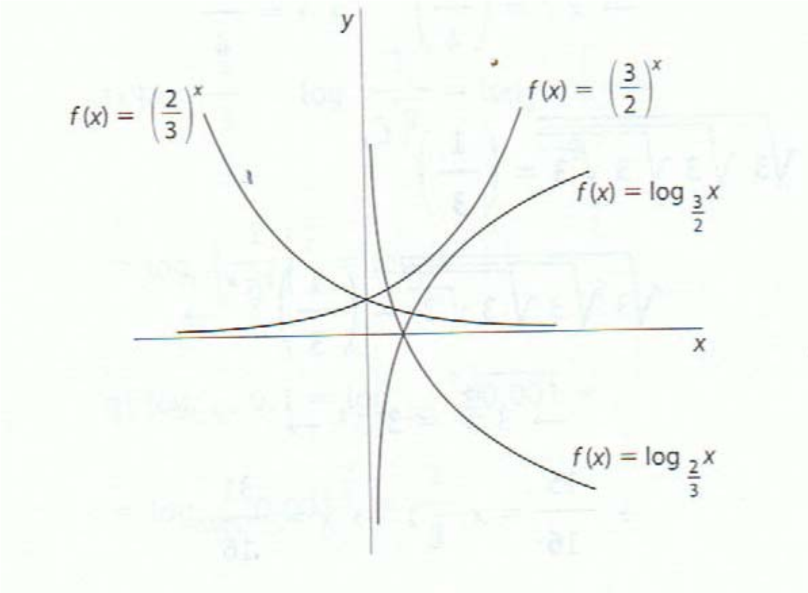
1 Dibuixa en uns mateixos eixos de coordenades les funcions exponencials $\left(\frac{3}{2}\right)^x$ **i** $\left(\frac{2}{3}\right)^x$ **i les funcions logarítmiques** $\log_{\frac{3}{2}} x$ **i** $\log_{\frac{2}{3}} x$

Hem de considerar que les funcions exponencials i les logarítmiques demanades són inverses una d'altra, seran simètriques respecte de la recta y=x. Per altra banda, en les dues exponencials, una té una base superior a 1, és una funció creixent, i l'altra menor de 1, és una funció decreixent



2 Es considera la funció exponencial $f(x) = a^x$ **. Demostra que si (p,q) és un punt de la seva gràfica, també ho és el punt** $\left(-p, \frac{1}{q}\right)$

Si sabem que $f(p) = q$ aleshores és $a^p = q$ i $a^{-p} = \frac{1}{a^p} = \frac{1}{q}$ d'on el punt $\left(-p, \frac{1}{q}\right)$ forma part de la seva gràfica

3 Determina el punt en què la gràfica de cadascuna de les funcions següents talla l'eix de les ordenades

$f(x) = 5e^x$ $\qquad$ $h(x) = -3 + 2a^{-x}$

$g(x) = -2\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$ $\qquad$ $p(x) = 1 - 3^{2x}$

En cada cas hem de calcular la imatge de zero

$f(x) = 5e^x \Rightarrow f(0) = 5e^0 = 5 \Rightarrow (0,5)$

$h(x) = -3 + 2a^{-x} \Rightarrow f(0) = -3 + 2a^0 = -1 \Rightarrow (0,-1)$

$g(x)=-2\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} \Rightarrow g(0)=-2\left(\frac{1}{3}\right)^{1}=-\frac{2}{3} \Rightarrow \left(0,-\frac{2}{3}\right)$

$p(x)=1-3^{2x} \Rightarrow p(0)=1-3^{0}=0 \Rightarrow (0,0)$

4 Resol aquestes equacions

$x^{-4}=256$

$\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{1-x}$

$3^{x}5^{x-1}=10125$

$\sqrt{\sqrt{7}+6\sqrt{7}}=49^{\frac{x}{2}}$

$27x^{3}=\frac{1}{125}$

$5^{4x}-3\cdot 5^{2x}-10=0$

$5^{x-1}=2+\frac{3}{5^{x-2}}$

$\left(a^{x-3}\right)^{x}=\left(\frac{1}{a}\right)^{-2x}$

$(2x)^{-\frac{2}{5}}=\sqrt[5]{e^{4}}$

$7^{x}+7^{x+1}+7^{x+2}=2793$

$x^{-4}=256 \Rightarrow x^{-4}=4^{4} \Rightarrow \frac{1}{x^{4}}=4^{4} \Rightarrow x=\frac{1}{4}$

$\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{1-x} \Rightarrow 3^{\frac{15}{16}}=3^{x-1} \Rightarrow \frac{15}{16}=x-1 \Rightarrow x=\frac{31}{16}$

$3^{x}5^{x-1}=10125 \Rightarrow \frac{15^{x}}{5}=10125 \Rightarrow 15^{x}=5\cdot 10125 \Rightarrow 15^{x}=15^{4} \Rightarrow x=4$

$\sqrt{\sqrt{7}+6\sqrt{7}}=49^{\frac{x}{2}} \Rightarrow \sqrt{7\sqrt{7}}=\left(7^{2}\right)^{\frac{x}{2}} \Rightarrow 7^{\frac{3}{4}}=7^{x} \Rightarrow x=\frac{3}{4}$

$27x^{3}=\frac{1}{125} \Rightarrow x^{3}=\frac{1}{27\cdot 125}=\frac{1}{3^{3}5^{3}}=\frac{1}{15^{3}} \Rightarrow x=\frac{1}{15}$

$5^{4x}-3\cdot 5^{2x}-10=0 \Rightarrow \left[5^{2x}=t\right] \Rightarrow t^{2}-3t-10=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow t=\frac{3\pm\sqrt{49}}{2}=\frac{3\pm 7}{2}=\left(\begin{array}{l}5\\-2\end{array}\right.$

prescindim de la solució negativa i tenim

$5^{2x}=5 \Rightarrow 2x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$

$\left(a^{x-3}\right)^{x}=\left(\frac{1}{a}\right)^{-2x} \Rightarrow a^{x^{2}-3x}=a^{2x} \Rightarrow x^{2}-3x=2x \Rightarrow x^{2}-5x=0 \Rightarrow x=\begin{cases}0\\5\end{cases}$

$(2x)^{-\frac{2}{5}}=\sqrt[5]{e^{4}} \Rightarrow (2x)^{-\frac{2}{5}}=e^{\frac{4}{5}} \Rightarrow 2x=\left(e^{\frac{4}{5}}\right)^{-\frac{5}{2}} \Rightarrow 2x=e^{-2} \Rightarrow x=\pm\frac{1}{2e^{2}}$

$7^{x}+7^{x+1}+7^{x+2}=2793 \Rightarrow 7^{x}(1+7+49)=2793 \Rightarrow 7^{x}=\frac{2793}{57}=49=7^{2} \Rightarrow x=2$

5 Demostra que si $f(x)=3^{-x}$, aleshores $f(x+2)=\frac{f(x)}{9}$ i $f(x-3)=27f(x)$

$$f(x+2) = 3^{-(x+2)} = 3^{-x}3^{-2} = \frac{3^{-x}}{9} = \frac{f(x)}{9}$$
$$f(x-3) = 3^{-(x-3)} = 3^{-x+3} = 3^3 3^{-x} = 27f(x)$$

6 Hem rebut a casa una carta que ens augura bona sort si n'enviem una fotocòpia a cinc persones. En cas contrari, si trenquem la cadena, la sort se'ns girarà en contra. Quina funció expressa el nombre de persones que rebran la carta successivament, si no es trenca la cadena?

$$5^0, 5^1, 5^2, \ldots \quad \Rightarrow f(x) = 5^x$$

7 Determina el punt en què la gràfica de cadascuna d'aquestes funcions talla l'eix de les abscisses

$f(x) = \log(x+3)$ $\qquad g(x) = \ln(2x-5)$

$h(x) = \log_3 \sqrt{3x}$ $\qquad p(x) = \log_5 \frac{5}{x}$

Hem de resoldre el valor de x que fa que les imatges de les funcions siguin zero

$$f(x) = \log(x+3) = 0 \Rightarrow x+3 = 1 \Rightarrow x = -2$$
$$g(x) = \ln(2x-5) = 0 \Rightarrow 2x-5 = 1 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$$
$$h(x) = \log_3 \sqrt{3x} = 0 \Rightarrow \sqrt{3x} = 1 \Rightarrow 3x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$
$$p(x) = \log_5 \frac{5}{x} = 0 \Rightarrow \frac{5}{x} = 1 \Rightarrow x = 5$$

8 Calcula els logaritmes següents sense utilitzar calculadora

$\log_4 \frac{1}{16}$ $\qquad \log_5 \sqrt[3]{25}$ $\qquad \log_{\frac{1}{a}} a^{\sqrt{3}}$ $\qquad \log \frac{1}{\sqrt{10}}$

$\log_{\frac{1}{2}} 2$ $\qquad \log_9 \frac{1}{3}$ $\qquad \log_{0,001} 0{,}1$

$$\log_4 \frac{1}{16} = x \Rightarrow 4^x = \frac{1}{16} = 4^{-2} \Rightarrow x = -2$$
$$\log_5 \sqrt[3]{25} = x \Rightarrow 5^x = \sqrt[3]{25} = 5^{\frac{2}{3}} \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$
$$\log_{\frac{1}{a}} a^{\sqrt{3}} = x \Rightarrow \left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{\sqrt{3}} \Rightarrow a^{-x} = a^{\sqrt{3}} \Rightarrow x = -\sqrt{3}$$
$$\log \frac{1}{\sqrt{10}} = x \Rightarrow 10^x = \frac{1}{\sqrt{10}} = 10^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$
$$\log_{\frac{1}{2}} 2 = x \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2 \Rightarrow 2^{-x} = 2 \Rightarrow x = -1$$
$$\log_9 \frac{1}{3} = x \Rightarrow 9^x = \frac{1}{3} \Rightarrow 3^{2x} = 3^{-1} \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$\log_{0,001} 0{,}1 = x \Rightarrow 0{,}001^{x} = 0{,}1 \Rightarrow 10^{-3x} = 10^{-1} \Rightarrow -3x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

10 Si log 2=m, expressa en funció de m

$\log 1600$ $\qquad \log\sqrt[5]{0{,}0002}$ $\qquad \log\sqrt{0{,}0064}$

$\log\left(\frac{1}{1{,}28}\right)^{-3}$ $\qquad \log 12{,}5$ $\qquad \log 0{,}8^{7}$

$$\log 1600 = \log 2^{4}\cdot 100 = 4\log 2 + \log 100 = 4m + 2$$

$$\log\sqrt[5]{0{,}0002} = \log\left(\frac{2}{10^{4}}\right)^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}(\log 2 - 4\log 10) = \frac{1}{5}(m-4)$$

$$\log\sqrt{0{,}0064} = \log\left(\frac{2^{6}}{10^{4}}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(6\log 2 - 4\log 10) = \frac{1}{2}(6m-4) = 3m-2$$

$$\log\left(\frac{1}{1{,}28}\right)^{-3} = -3\log\left(\frac{1}{1{,}28}\right) = -3(-\log 1{,}28) = 3\log(1{,}28) = 3\log\left(\frac{128}{100}\right) =$$

$$= 3\log\left(\frac{2^{7}}{10^{2}}\right) = 3(7\log 2 - 2) = 3(7m-2) = 21m - 6$$

$$\log 12{,}5 = \log\left(\frac{125}{10}\right) = \log\left(\frac{5^{3}}{10}\right) = \log\left(\frac{\left(\frac{10}{2}\right)^{3}}{10}\right) = 3(\log 10 - \log 2) - \log 10 = 2 - 3m$$

$$\log 0{,}8^{7} = 7\log\left(\frac{8}{10}\right) = 7\log\left(\frac{2^{3}}{10}\right) = 7(3\log 2 - \log 10) = 7(3m-1) = 21m - 7$$

11 Determina l'expressió de log x que correspon a cadascuna de les igualtats següents

$x = \left(\frac{3a^{2}b}{c^{3}d}\right)^{2}$ $\qquad x = \sqrt[4]{\frac{a(b+c)}{d^{5}}}$

$x = \frac{a^{3}b^{4}c^{\frac{1}{6}}}{m^{\frac{2}{3}}n\sqrt{p}}$ $\qquad x = \frac{h}{mnpqr}$

$$x = \left(\frac{3a^{2}b}{c^{3}d}\right)^{2}$$

$$\log x = 2(\log 3 + 2\log a + \log b - 3\log c - \log d)$$

$$x = \sqrt[4]{\frac{a(b+c)}{d^{5}}}$$

$$\log x = \frac{1}{4}\left(\log a + \log(b+c) - 5\log d\right)$$

$$x = \frac{a^3 b^4 c^{\frac{1}{6}}}{m^{\frac{2}{3}} n \sqrt{p}}$$

$$\log x = 3\log a + 4\log b + \frac{1}{6}\log c - \frac{2}{3}\log m - \log n - \frac{1}{2}\log p$$

$$x = \frac{h}{mnpqr}$$

$$\log x = \log h - \log m - \log n - \log p - \log q - \log r$$

12 Estableix l'expressió de x corresponent a

$$\ln x = 3\ln a + 2\ln b - \frac{1}{2}\ln c$$

$$\log x = \frac{1}{5}(3\log a - 2\log b) - 7(\log c + 4\log d)$$

$$\log_4 x = 3\log_4 a + 2\log_4 b - \frac{\log_4 c + \log_4 d}{3}$$

$$\ln x = \frac{1}{2}(3\ln a + \ln b - \ln c - 5\ln d)$$

$$\ln x = 3\ln a + 2\ln b - \frac{1}{2}\ln c \Rightarrow x = \frac{a^3 b^2}{\sqrt{c}}$$

$$\log x = \frac{1}{5}(3\log a - 2\log b) - 7(\log c + 4\log d) \Rightarrow x = \frac{\sqrt[5]{\frac{a^3}{b^2}}}{(cd^4)^7}$$

$$\log_4 x = 3\log_4 a + 2\log_4 b - \frac{\log_4 c + \log_4 d}{3} \Rightarrow x = \frac{a^3 b^2}{\sqrt[3]{cd}}$$

$$\ln x = \frac{1}{2}(3\ln a + \ln b - \ln c - 5\ln d) \Rightarrow x = \sqrt{\frac{a^3 b}{cd^5}}$$

15 Resol aquestes equacions

$$2\log x - 4\log 2 = 3\log x$$

$$3\ln x - \ln 32 = \frac{\ln x}{2}$$

$$\frac{10^{\log x}}{1 + 10^{2\log x}} = \frac{1}{2}$$

$$7^{3x+2} = 140$$

$$3\log_2 x - 2\log_2 \frac{x}{3} = 2\log_2 3 + 1$$

$$\ln 2 + \ln(11 - x^2) = 2\ln(5 - x)$$

$$2\log x = 3 + \log \frac{x}{10}$$

$$2\log x - 4\log 2 = 3\log x$$

$$\log\left(\frac{x^2}{2^4}\right) = \log x^3 \Rightarrow \left(\frac{x^2}{2^4}\right) = x^3 \Rightarrow x = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$$

$$3\log_2 x - 2\log_2 \frac{x}{3} = 2\log_2 3 + 1$$

$$\log_2\left(\frac{x^3}{\left(\frac{x}{3}\right)^2}\right)=\log_2\left(3^2\cdot 2\right)\Rightarrow 9x=18\Rightarrow x=2$$

$$3\ln x-\ln 32=\frac{\ln x}{2}$$

$$\ln\left(\frac{x^3}{32}\right)=\ln\sqrt{x}\Rightarrow \frac{x^3}{32}=\sqrt{x}\Rightarrow \frac{x^6}{32^2}=x\Rightarrow x^5=32^2\Rightarrow x=\sqrt[5]{32^2}=4$$

$$\ln 2+\ln(11-x^2)=2\ln(5-x)$$

$$\ln(2(11-x^2))=\ln(5-x)^2\Rightarrow 2(11-x^2)=(5-x)^2\Rightarrow 22-2x^2=25-10x+x^2\Rightarrow$$

$$3x^2-10x+3=0\Rightarrow x=\begin{cases}3\\ \frac{1}{3}\end{cases}$$

$$\frac{10^{\log x}}{1+10^{2\log x}}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{10^{\log x}}{1+10^{2\log x}}=\frac{1}{2}\Rightarrow \frac{x}{1+x^2}=\frac{1}{2}\Rightarrow 2x=1+x^2\Rightarrow x^2-2x+1=0\Rightarrow x=1$$

$$2\log x=3+\log\frac{x}{10}$$

$$2\log x=3+\log\frac{x}{10}\Rightarrow \log x^2=\log\left(1000\cdot\frac{x}{10}\right)\Rightarrow x^2=100x\Rightarrow x=\begin{cases}0\\100\end{cases}$$

0 no pot ser solució. Només té com solució x=100

$$7^{3x+2}=140$$

Prenent logaritmes

$$7^{3x+2}=140\Rightarrow (3x+2)\log 7=\log 140\Rightarrow 3x+2=\frac{\log 140}{\log 7}=\frac{2{,}146128}{0{,}845098}\Rightarrow x=0{,}1798339$$

16 Calcula x en cadascuna de les igualtats següents

$\log_3\sqrt{x}=\frac{1}{2}$

$\log_{\frac{1}{3}} x=-\frac{1}{2}$

$\log_x\frac{1}{2\sqrt{2}}=-3$

$\log_x 2x=2$

$\log_x\sqrt{2}=3$

$\log_4 x=\frac{3}{2}$

$$\log_3\sqrt{x}=\frac{1}{2}\Rightarrow 3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}\Rightarrow\sqrt{3}=\sqrt{x}\Rightarrow x=3$$

$$\log_x 2x=2\Rightarrow x^2=2x\Rightarrow x^2-2x=0\Rightarrow x=\begin{cases}0\\2\end{cases}$$

x=0 no és solució

$$\log_{\frac{1}{3}} x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} = x \Rightarrow 3^{\frac{1}{2}} = x \Rightarrow x = \sqrt{3}$$

$$\log_x \sqrt{2} = 3 \Rightarrow x^3 = \sqrt{2} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{2}$$

$$\log_x \frac{1}{2\sqrt{2}} = -3 \Rightarrow x^{-3} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow x^3 = 2\sqrt{2} \Rightarrow x = \sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

19 Resol els sistemes d'equacions següents

$$\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ 2\log x - 2\log y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log x - \log y = 1 \\ 3x + 5y = 35 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log x + 3\log = 5 \\ \log \dfrac{x^2}{y} = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 11 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\log y - 3\log x = 1 \\ \log(xy) = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_x (y-18) = 2 \\ \log_y (x+3) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ 2\log x - 2\log y = -1 \end{cases}$$

Reduïm les equacions multiplicant la primera per 2 i sumant la segona

$$\begin{cases} 2\log x + 2\log y = 6 \\ 2\log x - 2\log y = -1 \end{cases} \Rightarrow 4\log x = 5 \Rightarrow \log x = \frac{5}{4} \Rightarrow x = 10^{\frac{5}{4}}$$

amb la primera equació obtenim

$$\frac{5}{4} + \log y = 3 \Rightarrow \log y = 3 - \frac{5}{4} = \frac{7}{4} \Rightarrow y = 10^{\frac{7}{4}}$$

$$\begin{cases} \log x - \log y = 1 \\ 3x + 5y = 35 \end{cases}$$

La primera equació, sense logaritmes

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} = 10 \\ 3x + 5y = 35 \end{cases} \Rightarrow x = 10y \Rightarrow 30y + 5y = 35 \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log x + 3\log = 5 \\ \log \dfrac{x^2}{y} = 3 \end{cases}$$

Podem transformar la segona equació

$$\begin{cases} \log x + 3\log = 5 \\ \log \dfrac{x^2}{y} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log x + 3\log y = 5 \\ 2\log x - \log y = 3 \end{cases}$$

Aïllem log y de la segona i substituïm a la primera

$\log y = 2\log x - 3$

$\log x + 3(2\log x - 3) = 5 \quad \Rightarrow 7\log x = 14 \Rightarrow \log x = 2 \Rightarrow x = 100$

i per calcular y

$\log y = 4 - 3 = 1 \Rightarrow y = 10$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 11 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$$

La segona equació, sense logaritmes, és $\frac{x}{y} = 10$. Aïllem x i substituïm

$(10y)^2 - y^2 = 11 \Rightarrow 99y^2 = 11 \Rightarrow y^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow y = \frac{1}{3}$

i $x = \frac{10}{3}$

$$\begin{cases} 2\log y - 3\log x = 1 \\ \log(xy) = 3 \end{cases}$$

La segona equació és equivalent a $\log x + \log y = 3$. Multiplicant per 3 i sumant la primera equació reduïm

$$\begin{cases} 2\log y - 3\log x = 1 \\ 3\log x + 3\log y = 9 \end{cases} \Rightarrow 5\log y = 10 \Rightarrow \log y = 2 \Rightarrow y = 100$$

i $x = 10$

$$\begin{cases} \log_x (y - 18) = 2 \\ \log_y (x + 3) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Sense logaritmes les equacions són

$$\begin{cases} x^2 = y - 18 \\ \sqrt{y} = x + 3 \end{cases}$$

De la segona equació $y = (x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$

si substituïm a la primera

$x^2 = x^2 + 6x + 9 - 18 \Rightarrow 6x = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$

i $y = \left(\frac{3}{2} + 3\right)^2 = \frac{81}{4}$

21 La taxa de despoblació d'una ciutat és del 1,5% anual. Suposant que aquesta taxa no es modifica, quants anys hauran de transcórrer perquè la població actual es redueixi a la meitat. Si actualment aquesta ciutat té 100.000 habitants, quants en tindrà d'aquí a set anys?

Si la taxa de despoblació és del 1,5% anual, cada any hi ha el 98,5% dels habitants. Si h és la població inicial aquesta es transforma segons la funció

$f(t) = h \cdot 0{,}985^t$

Si la població es redueix a la meitat

$h \cdot 0{,}985^t = \frac{h}{2} \Rightarrow 0{,}985^t = 0{,}5$

Per resoldre aquesta equació exponencial, prenem logaritmes

$\log\left(0{,}985^{t}\right) = \log 0{,}5$

$t \cdot \log 0{,}985 = \log 0{,}5$

$t = \dfrac{\log 0{,}5}{\log 0{,}985} = 45{,}86$

Hauran de transcórrer 46 anys

Al cap de 7 anys la població serà

$f(t = 7) = 100.000 \cdot 0{,}985^{7} = 89961$