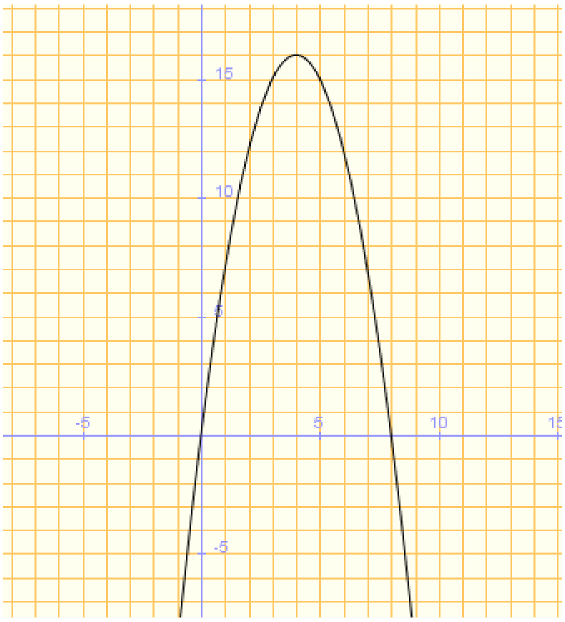
1. **En quins punts de la gràfica de la funció $f(x)=\frac{1}{x}$ la recta tangent és perpendicular a la recta $4x+y-2=0$?. Escriu les equacions d'aquestes rectes tangents**

La recta $4x+y-2=0$ té de pendent $y=-4x+2$ el valor -4. Una recta perpendicular té de pendent $m=-\frac{1}{M}=\frac{1}{4}$. Hem de buscar els punts de la funció de derivada $\frac{1}{4}$.

La derivada de la funció és $y'=-\frac{1}{x^2}$. Aquesta derivada sempre és negativa, mai pot donar un valor $\frac{1}{4}$

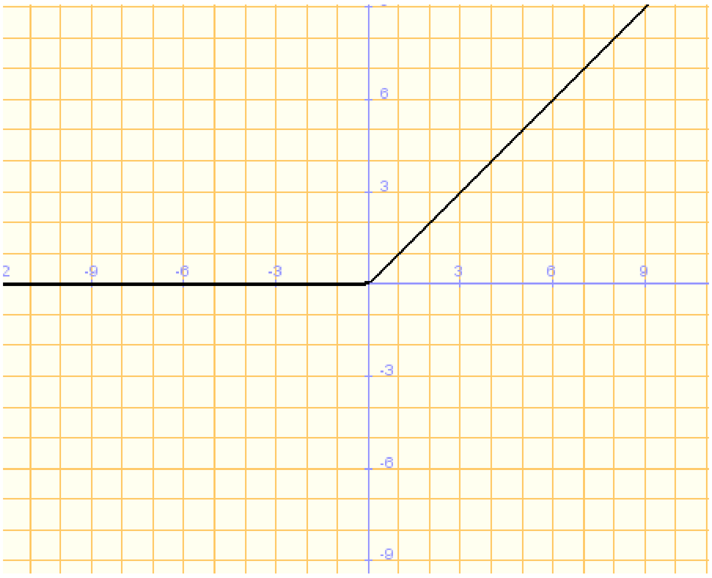
$y'=-\frac{1}{x^2}=\frac{1}{4} \Rightarrow x^2=-4 \Rightarrow x=\sqrt{-4}$ que no existeix dins dels nombres Reals.

2. **Dibuixa en un paper mil·limetrat la gràfica de la funció $f(x)=-x^2+8x$. Tot seguit, fes una estimació a partir d'aquesta gràfica dels valors de $f'(1)$ i $f'(5)$. Calcula analíticament $f'(1)$ i $f'(5)$ i compara els resultats amb els anteriors**



La funció és una paràbola convexa que talla l'eix OX en els punts 0 i 8
En el punt x=1 la funció és creixent i té una derivada positiva
En el punt x=5 la funció és decreixent i té una derivada negativa
La derivada analítica de la funció és $f'(x)=-2x+8$. Els valors en els punts demanats son $f'(x=1)=6$ i $f'(x=5)=-2$

3. **Representa gràficament la funció $f(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ x & x\geq 0 \end{cases}$. Aquesta funció és contínua en x=0? I derivable?. Justifica les respostes**



En el punt x=0 la funció és contínua, ja que està definida $f(0)=0$ i coincideix amb els límits laterals en aquest punt

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 0 = 0$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x = 0$

La funció no és derivable en aquest punt. La derivada és

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

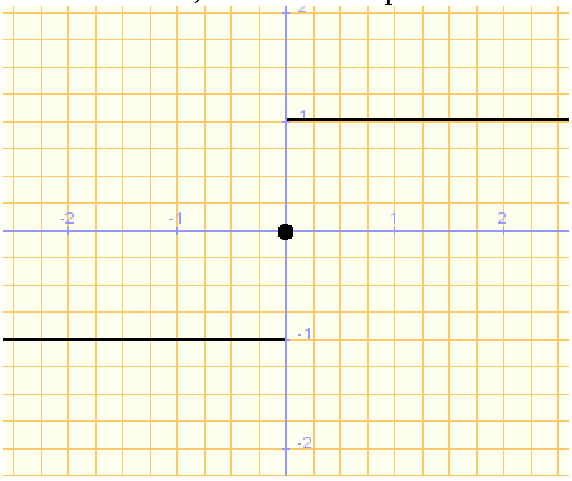
La derivada per l'esquerra és 0 i la derivada per la dreta és 1. No és derivable en x=0

4. Indica en quins punts és derivable la funció

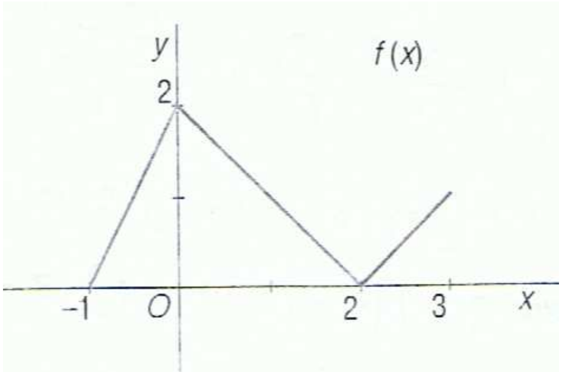
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Primer hem de veure si és contínua en el punt x=0

Quan x és positiu $\frac{x}{|x|} = \frac{x}{x} = 1$, i quan x és negatiu $\frac{x}{|x|} = \frac{x}{-x} = -1$, d'on la funció no és contínua a x=0, aleshores tampoc és derivable en aquest punt



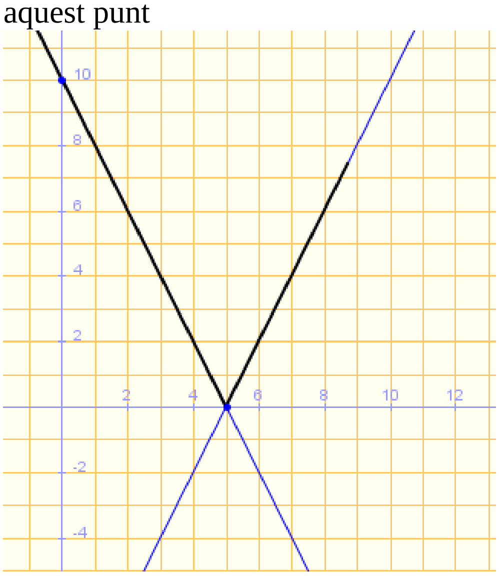
5. La gràfica d'una funció f(x) és la de la figura. Sense calcular-ne l'expressió analítica, representa gràficament la funció f'(x).



Des de –1 fins 0 el pendent de f(x) és 2, el valor de la seva derivada. Des de 0 fins 2 el pendent és –1 i des de 2 fins 3 el pendent és 1. La derivada no és contínua en els punts x=0 i x=2

6. **Troba les derivades laterals en x=5 de la funció $f(x)=|2x-10|$. És derivable en aquest punt?**

La derivada per l'esquerra és –2 i la derivada per la dreta és +2. No és derivable en aquest punt



7. **Indica els intervals de creixement i decreixement i els punts estacionaris de la funció $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-4}$**

La derivada de la funció és

$$f'(x)=\frac{2x(x^2-4)-x^2 2x}{(x^2-4)^2}=\frac{2x^3-8x-2x^3}{(x^2-4)^2}=\frac{-8x}{(x^2-4)}$$

Aquesta derivada val zero quan x=0. Si x<0 la derivada és positiva i la funció és creixent, si x>0 la derivada és negativa i la funció és decreixent. El punt x=0 és un màxim relatiu

8. **La funció $f(x)=\dfrac{x^2}{(x-1)^2}$ és creixent o decreixent en x=2?. Justifica la resposta**

La derivada de la funció és.

$$f'(x) = \frac{2x(x-1)^2 - 2(x-1)x^2}{(x-1)^4} = \frac{2x^3 - 4x^2 + 2x - 2x^3 + 2x^2}{(x-1)^4} = \frac{-2x^2 + 2x}{(x-1)^4}$$

El valor de la derivada quan x=2 és

$$f'(x=2) = \frac{-8+4}{(2-1)^4} < 0$$

negatiu, aleshores la funció és decreixent

9. **Donada la paràbola d'equació $f(x) = x^2 - 2x + 5$, es considera la recta r que uneix els punts d'aquesta paràbola les abscisses dels quals són x=1 i x=3. Troba l'equació de la recta tangent a la paràbola que és paral·lela a la recta r**

Les imatges en aquests punts donen el pendent de la recta

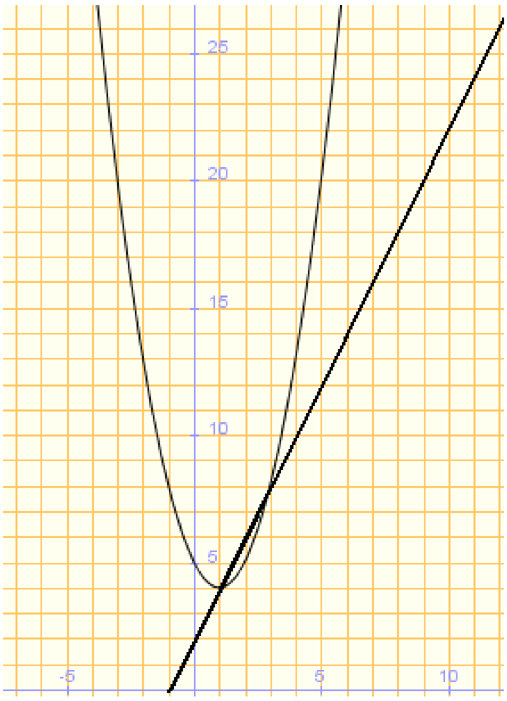
$$m = \frac{f(3) - f(1)}{3-1} = \frac{8-4}{2} = 2$$

La derivada de la funció és $f'(x) = 2x - 2$ que dóna el pendent de la recta tangent en cada punt. Si demanem que la derivada sigui 2 obtenim el punt

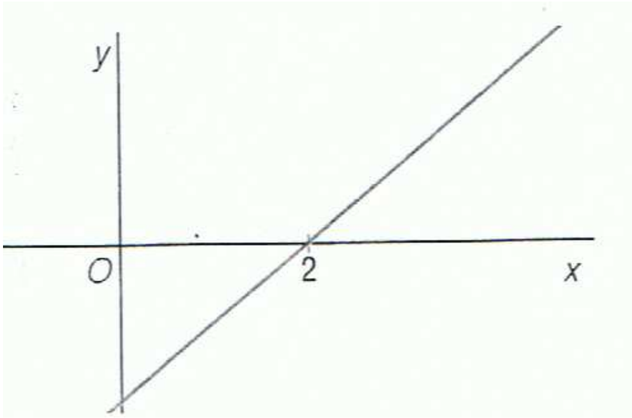
$$f'(x) = 2x - 2 = 2 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$$

La recta passa pel punt $(2, f(2)) = (2,5)$ i té pendent 2. La seva equació és

$$y - 5 = 2(x-2) \Rightarrow y = 2x - 1$$



10. **Aquesta és la representació gràfica de la derivada $f'(x)$ de una funció polinòmica $f(x)$. Quin és el grau d'aquesta funció polinòmica? Per què? Indica els intervals de creixement i decreixement de la funció $f(x)$. Té $f(x)$ algun punt estacionari? Quin és?**



La derivada és una recta, un polinomi de primer grau, la funció ha de ser una paràbola, un polinomi de segon grau
La derivada és negativa a $(-\infty,2)$, la funció és decreixent. La derivada és positiva a $(2,\infty)$ i la funció és creixent. En el punt 2 la funció passa de decreixent a creixent, la derivada és zero i aquest punt és un mínim relatiu

11. Donada la funció $f(x)=xe^x$, resol les equacions $f'(x)=0$ i $f''(x)=0$

Calculem la primera derivada i igualem a zero
$f'(x)=e^x+xe^x=e^x(1+x)=0$
La solució és $x=-1$ de $(1+x)=0$. Observem que e^x no és mai zero
La segona derivada és
$f''(x)=e^x(1+x)+e^x=e^x(2+x)$
que té de solució $x=-2$

12. Troba per a quin valor de a i b és contínua i derivable la funció
$$f(x)=\begin{cases} 3x & x\le 1 \\ ax^2+b(x-1) & x>1 \end{cases}$$
La funció és contínua arreu. Mirem la continuïtat quan x=1
$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} 3x=3$
$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} ax^2+b(x-1)=a$
Si la funció és contínua ha de ser $3=a$
La derivada de la funció és
$$f'(x)=\begin{cases} 3 & x\le 1 \\ 2ax^2+b & x>1 \end{cases}$$
En el punt 1 la derivada per l'esquerra és 3 i la derivada per la dreta és $2a+b$. Per ser derivable han de coincidir aquests valors. Amb el resultat anterior de $a=3$ ha de ser $b=-3$

13. Calcula la derivada de les funcions

$f(x)=\sin^4\left[\ln(x^2+5)\right]$
$y'=4\sin^3\left[\ln(x^2+5)\right]\cos\left[\ln(x^2+5)\right]\dfrac{2x}{x^2+5}$

$$f(x)=\frac{(x+2)\ln x}{\sqrt{x+1}}$$

$$y'=\frac{\left(\ln x+\frac{x+2}{x}\right)\sqrt{x+1}-\frac{(x+2)\ln x}{2\sqrt{x+1}}}{x+1}$$

$$f(x)=\cos\sqrt{x^2+16}$$

$$y'=-\sin\sqrt{x^2+16}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+16}}=-\frac{x\sin\sqrt{x^2+16}}{\sqrt{x^2+16}}$$

$$f(x)=\tan^3\sqrt{x^2+2}$$

$$y'=3\tan^2\sqrt{x^2+2}\left(1+\tan^2\sqrt{x^2+2}\right)\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$$

$$f(x)=\left[1+\cos^2(1-3x)\right]^2$$

$$y'=2\left[1+\cos^2(1-3x)\right]\cdot 2\cos(1-3x)\cdot(-\sin(1-3x))\cdot(-3)=$$

$$12\left[1+\cos^2(1-3x)\right]\cos(1-3x)\sin(1-3x)$$

$$f(x)=\log_2\sqrt{\frac{x^2}{x^2-4}}$$

Fem servir les propietats dels logaritmes

$$f(x)=\log_2\sqrt{\frac{x^2}{x^2-4}}=\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{x^2}{x^2-4}\right)=\frac{1}{2}\left[\log_2(x^2)-\log_2(x^2-4)\right]=\log_2 x-\frac{1}{2}\log_2(x^2-4)$$

ara derivem la funció

$$y'=\frac{1}{x\ln 2}-\frac{2x}{2(x^2-4)\ln 2}=\frac{1}{\ln 2}\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2-4}\right)$$

$$f(x)=\sec^2\left(x^3-2\right)$$

La funció secant és la recíproca de la funció cosinus

$$f(x)=\sec^2\left(x^3-2\right)=\frac{1}{\cos^2(x^3-2)}=\left[\cos(x^3-2)\right]^{-2}$$

La derivada és

$$y'=(-2)\left[\cos(x^3-2)\right]^{-3}\left[-\sin(x^3-2)\right]3x^2=\frac{6x^2\sin(x^3-2)}{\cos^3(x^3-2)}$$

$$f(x)=\arcsin\frac{\sqrt{3x}}{2}$$

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{3x}{4}}}\frac{1}{2}\frac{1}{2}(3x)^{-\frac{1}{2}}3=\frac{3}{4\sqrt{3x}\sqrt{1-\frac{3x}{4}}}$$

$$f(x)=\arctan\frac{3x+2}{4}$$

$$y'=\frac{1}{1+\left(\frac{3x+2}{4}\right)^2}\cdot\frac{1}{4}\cdot 3=\frac{3}{4\left[1+\left(\frac{3x+2}{4}\right)^2\right]}$$

$$f(x)=2^{\arctan x}\sqrt{1-x^2}$$

$$y'=2^{\arctan x}\ln 2\frac{1}{1+x^2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}2^{\arctan x}\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2^{\arctan x}\ln 2\sqrt{1-x^2}}{1+x^2}-\frac{x2^{\arctan x}}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f(x)=(x^2+3)^{x+5}$$

Fem servir derivació logarítmica

$$y=(x^2+3)^{x+5}\quad\Rightarrow \ln y=(x+5)\ln(x^2+3)\Rightarrow\quad \frac{1}{y}y'=\ln(x^2+3)+\frac{2x(x+5)}{x^2+3}\quad\Rightarrow$$

$$y'=(x^2+3)^{x+5}\left[\ln(x^2+3)+\frac{2x(x+5)}{x^2+3}\right]$$

$$f(x)=\ln\sqrt{\ln x}$$

$$y'=\frac{1}{\sqrt{\ln x}}\frac{1}{2}(\ln x)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}\sqrt{\ln x}}=\frac{1}{2x\ln x}$$

$$f(x)=\frac{1}{\sin^3 x}$$

$$f(x)=\frac{1}{\sin^3 x}=(\sin x)^{-3}$$

$$y'=-3(\sin x)^{-4}(\cos x)=-\frac{3\cos x}{\sin^4 x}$$

$$f(x)=\frac{e^{2x}+\ln^2 x+\cos 3x}{2}$$

$$y'=\frac{1}{2}\left[2e^{2x}+2\ln x\frac{1}{x}-3\sin 3x\right]$$

$$f(x)=\frac{5}{(2x+6)^3}$$

$$f(x)=\frac{5}{(2x+6)^3}=5(2x+6)^{-3}$$

$$y'=-15(2x+6)^{-4}(2)=-\frac{30}{(2x+6)^4}$$

$$f(x)=e^{\tan 3x}\sqrt[3]{x^2+1}$$

$$f(x)=e^{\tan 3x}\sqrt[3]{x^2+1}=e^{\tan 3x}\cdot(x^2+1)^{\frac{1}{3}}$$

$$y'=e^{\tan 3x}\cdot(1+\tan^2 3x)3\sqrt[3]{x^2+1}+e^{\tan 3x}\frac{1}{3}(x^2+1)^{-\frac{2}{3}}2x=$$

$$=3e^{\tan 3x}(1+\tan^2 3x)\sqrt[3]{x^2+1}+\frac{2xe^{\tan 3x}}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$$

14. El nombre N de bacteris d’un determinat cultiu varia en funció del temps t expressat en hores, d’acord amb l’equació $N(t)=10e^{\frac{t}{2}}$. Quin és el nombre inicial de bacteris en el cultiu? En quin moment creix més de pressa el nombre d’aquests bacteris, quan t=2 o quan t=4? Per què?

El nombre inicial de bacteris correspon a la imatge de zero

$N(0)=10e^{\frac{0}{2}}=10e^{0}=10$

La derivada de la funció dóna el creixement dels bacteris cada moment, la derivada és

$N'(t)=10\cdot\frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}=5e^{\frac{t}{2}}$

Els valors en els punts demanats són

$N'(2)=5e$

$N'(4)=5e^{2}$

Creix més ràpidament quan t=4

15. Calcula les tres primeres derivades de la funció $f(x)=e^{3x}$. Dedueix l'expressió de la derivada enèsima $f^{(n)}(x)$ d'aquesta funció

La primera derivada és $f'(x)=3e^{3x}$

La segona derivada $f''(x)=3\cdot 3e^{3x}=3^{2}e^{3x}$

La tercera $f'''(x)=3\cdot 3\cdot 3e^{3x}=3^{3}e^{3x}$

La derivada d'ordre n $f^{(n)}(x)=3^{n}e^{3x}$

16. Tenint en compte que $arc\sec x=\arccos\frac{1}{x}$, calcula la derivada de la funció $f(x)=arc\sec x$. De manera similar, pots calcular les derivades de les funcions $g(x)=\arccos ec\ x$ i $h(x)=arc\cot ang\ x$

Recordem que la cotangent és la inversa de la tangent, la secant la inversa del cosinus i la cosecant la inversa del sinus

$$(arc\sec x)'=\left(\arccos\frac{1}{x}\right)'=\left(\arccos x^{-1}\right)'=\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^{2}}}}\cdot\frac{-1}{x^{2}}=\frac{1}{x\sqrt{x^{2}-1}}$$

$$(\arccos ecx)'=\left(\arcsin\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^{2}}}}\cdot\frac{-1}{x^{2}}=-\frac{1}{x\sqrt{x^{2}-1}}$$

$$(arc\cot anx)'=\left(\arctan\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{1+\frac{1}{x^{2}}}\cdot\frac{-1}{x^{2}}=-\frac{1}{x^{2}+1}$$

17. Troba l'equació de la recta normal a la gràfica de la funció $f(x)=x^{2}-7x+10$ en els punts d'ordenada nul·la

Els punts d'ordenada nul·la són les solucions de

$$f(x)=x^{2}-7x+10=0\Rightarrow x=\frac{7\pm\sqrt{49-40}}{2}=\frac{7\pm 3}{2}=\begin{cases}5\\2\end{cases}$$

La derivada en cada un d'aquests punts dóna el pendent de la recta tangent

$f'(x) = 2x - 7$

En el punt x=2 $f'(x=2) = -3$

En el punt x=5 $f'(x=5) = 3$

Si m és el pendent de la recta tangent. la normal té de pendent $M = -\frac{1}{m}$

En el punt x=2, la recta normal té pendent $\frac{1}{3}$ i passa per (2,0), la seva equació és

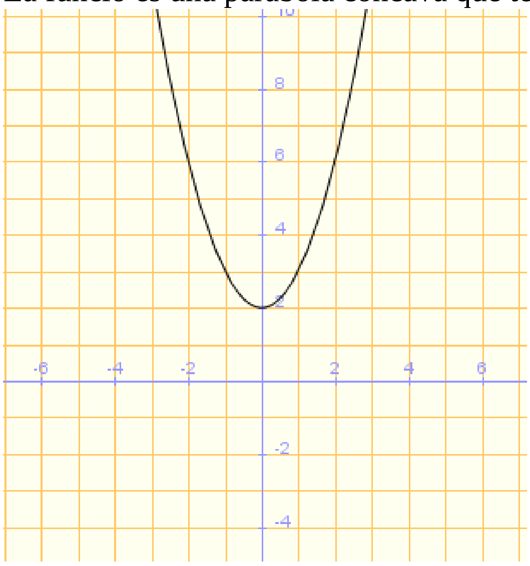
$y - 0 = \frac{1}{3}(x-2) \Rightarrow y = \frac{x}{3} - \frac{2}{3}$

En el punt x=5 la recta normal té de pendent $-\frac{1}{3}$ i passa per (5,0). La seva equació és

$y - 0 = -\frac{1}{3}(x-5) \Rightarrow y = -\frac{x}{3} + \frac{5}{3}$

18. Representa gràficament la funció $f(x) = x^2 + 2$. Hi ha algun punt on aquesta funció no sigui derivable?. Justifica'n la resposta

La funció és una paràbola còncava que té el vèrtex en el punt (2,0)



La seva derivada és $f'(x) = 2x$. Té derivada arreu

19. Determina l'expressió algèbrica de la funció $f(x)$ que verifica les condicions següents: $f'(x) = 3$ i el seu gràfic passa pel punt P(2,10)

Si és una funció polinòmica aquesta ha de ser de la forma $f(x) = 3x + b$ si la seva derivada és 3

Passa per (2,10) i ha de ser $10 = 3 \cdot 2 + b \Rightarrow b = 4$

La funció demanada és $f(x) = 3x + 4$

20. Indica raonadament per què la funció $f(x) = \frac{a}{x-b}$, on a i b són nombres reals, no pot tenir punts estacionaris

La derivada de la funció és

$f'(x) = \frac{-a}{(x-b)^2}$

Aquesta derivada només pot ser 0 quan a=0, però aleshores la funció inicial seria nul·la. Si la derivada no val mai zero no té punts estacionaris.

21. Se sap que la funció $f(x)=ax^2+bx+12$ presenta un mínim en el punt P(4,-4). Calcula a i b

La funció passa per P(4,-4). La imatge de x=4 és –4

$f(x=4)=a\cdot 4^2+b\cdot 4+12=-4 \Rightarrow 16a+4b=-16$

A més a més quan x=4 la derivada de la funció és zero, ja que té un mínim. La derivada de la funció és $f'(x)=2ax+b$ que en el punt 4 és

$f'(x=4)=8a+b=0$

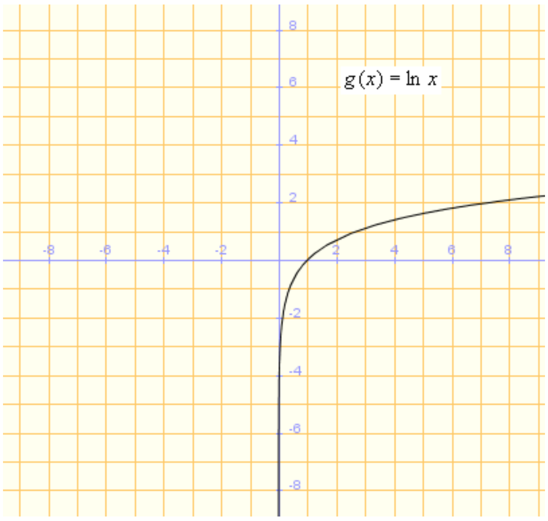
Formem un sistema amb les dues equacions

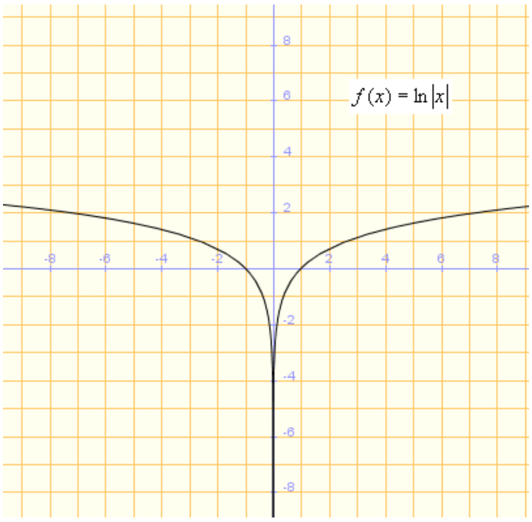
$$\begin{cases} 16a+4b=-16 \\ 8a+b=0 \end{cases}$$

La solució d'aquest sistema és $a=1$ i $b=-8$

22. Dibuixa de manera aproximada la gràfica de la funció $f(x)=\ln|x|$. Indica raonadament si hi ha algun punt en que aquesta funció no sigui derivable

Representem la funció $g(x)=\ln x$ i, en base aquesta, la funció $f(x)=\ln|x|$

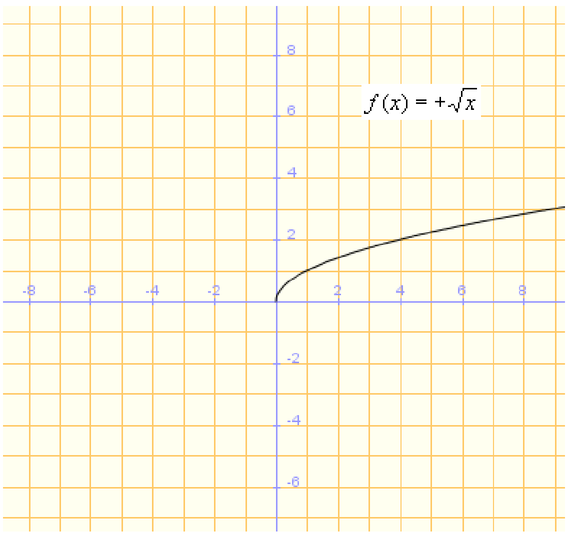




En el punt x=0 la funció no està definida. Aleshores no és contínua ni derivable

23. Justifica el motiu pel qual la funció $f(x)=+\sqrt{x}$ no és derivable en x=0

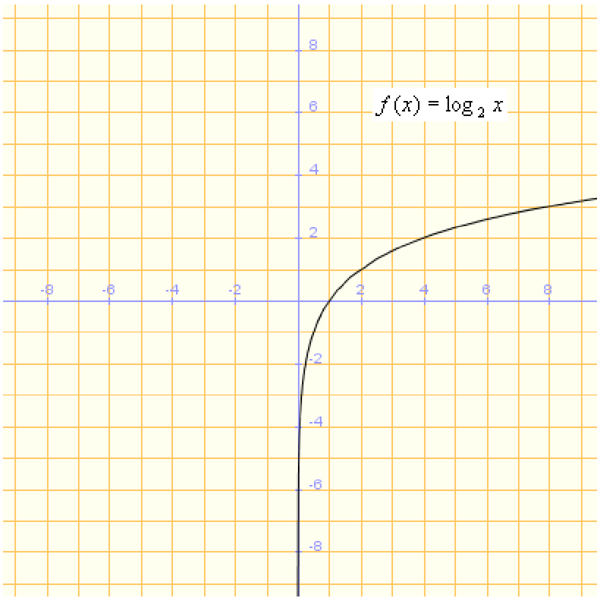
La funció $f(x)=+\sqrt{x}$ és

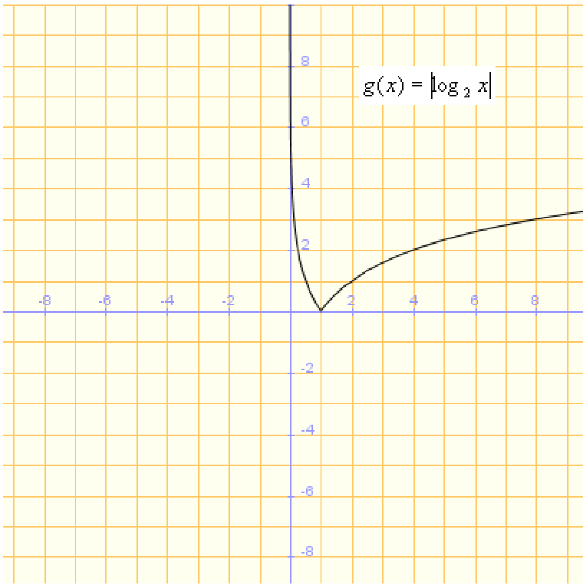


No existeix per a valors x<0. Aleshores no té derivada en aquest punt per l'esquerra. No és derivable quan x=0

24. Representa gràficament la funció $f(x)=\log_2 x$ i, a partir d'aquesta gràfica, dibuixa la funció $g(x)=|\log_2 x|$. Per a quins valors de x no existeix $g'(x)$? Per què ?

Representem les funcions $f(x)=\log_2 x$ i $g(x)=|\log_2 x|$





En el punt x=1 la funció $g(x)=|\log_2 x|$ no és derivable ja que no coincideixen les derivades laterals

La funció $g(x)=|\log_2 x|$ dóna valor 0 quan x=1, valors positius si x>1 i negatius quan x<1. Es pot definir com

$$g(x)=\begin{cases}\log_2 x & x\geq 1\\ -\log_2 x & x<1\end{cases}$$

Aquesta definició equival a dir que no hem de canviar el signe quan $x\geq 1$, ja que el resultat és positiu, però sí que hem de canviar el signe quan x<1

La derivada serà

$$g'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x\ln 2} & x\geq 1\\ -\dfrac{1}{x\ln 2} & x<1\end{cases}$$

Mirem ara si els límits a x=1 de les dues derivades coincideixen. Per l'esquerra és

$$g_-^{'}(x)=\lim_{x\to 1^-}-\frac{1}{x\ln 2}=-\frac{1}{\ln 2}$$

i per la dreta

$$g_+^{'}(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x\ln 2}=\frac{1}{\ln 2}$$

Els resultats són diferents, la funció no és derivable a x=1

25. La funció $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2} & x\neq 2\\ 3 & x=2\end{cases}$ és derivable en x=2? Per què?

Primer calculem si és contínua. El límit de la funció a x=2 és

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4$$

El límit no coincideix amb el valor de $f(x=2)=3$. De la manera que està definida la funció no és contínua a x=2. Si no és contínua ja no pot ser derivable