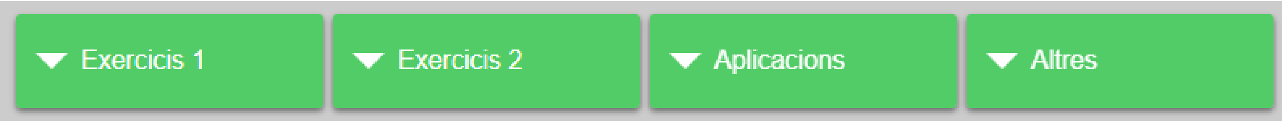
1 - Què hi ha?

Exercicis

Trobareu un conjunt d'exercicis resols.

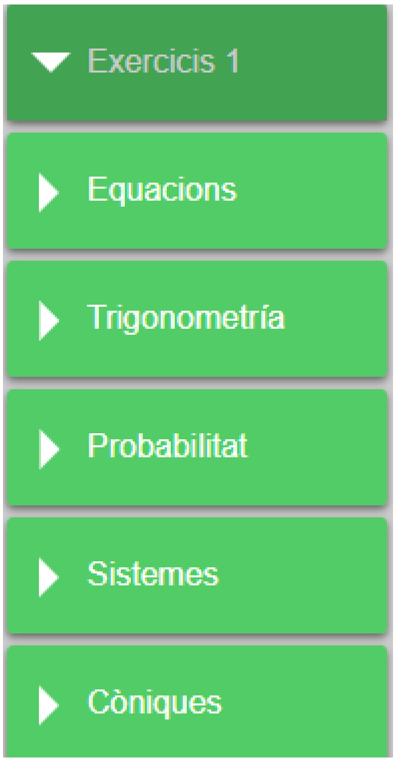
Inicialment teniu les opcions



Els primers apartats, Exercicis 1 i 2, son documents en format pdf que contenen exercicis resols de diferents temes.

Exercicis 1

Si despleguem Exercicis 1 veiem



els apartats de Equacions – Trigonometria – Probabilitat – Sistemes – Còniques

L'apartat Equacions conté:

Equacions

Equacions
Planteig 1
Planteig 2

Son pàgines amb exercicis de resolució d'equacions

3. Resol les equacions

$$\frac{3x-11}{20}-\frac{5x+1}{14}=\frac{x-7}{10}-\frac{5x-6}{21}$$

$$\frac{3x+17}{8}-\frac{1-4x}{13}=\frac{1-x}{4}-\frac{9+x}{6}$$

$\frac{3x-11}{20}-\frac{5x+1}{14}=\frac{x-7}{10}-\frac{5x-6}{21}$, el denominador comú és 420, transformem en

$$\frac{63x-231-150x+30}{420}=\frac{42x-294-100x+120}{420}\Rightarrow 63x-231-150x+30=42x-294-100x+120$$

operant obtenim $-29x=27\Rightarrow x=-\frac{27}{29}$

En la segona equació el denominador comú és 312

$$\frac{117x-663-24+96x}{312}=\frac{78-78x-468+52x}{312}$$

$$117x-663-24+96x=78-78x-468+52x\Rightarrow 239x=297\Rightarrow x=\frac{297}{239}$$

i de planteig d'equacions

4. La suma d'un nombre parell, el que el segueix i l'anterior és 282. Troba aquests nombres

$2x+2x+1+2x-1=282 \quad\Rightarrow\quad 6x=282 \quad\Rightarrow\quad x=47 \quad 2x=94$

els nombre són el 93, 94 i 95

alguns amb sistemes també resols

3. Si un amic dóna 1 € a l'altre tots dos tindrien el mateixos diners. Si el segon donés 1 € al primer aquest tindrà el doble dels diners del seu amic. Calculeu quant té cada un dels amics.

Si el primer té x i dóna 1 al segon tenen x-1 i y+1

Si el segon dóna 1 al primer tenen x+1 i y-1

$$\begin{cases} x-1=y+1 \\ x+1=2(y-1) \end{cases} \quad \begin{cases} x-y=2 \\ x-2y=-3 \end{cases}$$

si resolem obtenim y=5 i x=7

Tot plegat hi ha 13 pàgines i un total de 57 exercicis.

El segon apartat és

Trigonometria	**Trigonometria 1**
	Funcions
	Trigonometria 2
	Trigonometria 3

Exercicis elementals de trigonometria

9 Mirant des d'un cert punt veiem el terrat d'un gratacels sota un angle de 60º. Amb quin angle el veuríem des d'una distància doble de l'anterior?

Sigui h l'altura i d la distància, tenim $\tan 60 = \frac{h}{d} \Rightarrow d = \frac{h}{\tan 60}$

Sigui A l'angle quan ens allunyem a una distància doble $\tan A = \frac{h}{2d}$, si aïllem d i igualem els resultats obtenim

$$d = \frac{h}{\tan 60}\,;\, d = \frac{h}{2\tan A} \Rightarrow \frac{h}{\tan 60} = \frac{h}{2\tan A} \Rightarrow \tan A = \frac{\tan 60}{2}$$

L'angle A és, aproximadament, A=40,89º

De funcions trigonomètriques

7 Resol aquestes equacions trigonomètriques

$\cos x = -1$ $\qquad$ $\tan x = \sqrt{3}$

$\cot anx = -1$ $\qquad$ $\sec x = 1$

$$\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi$$

$$\tan x = \sqrt{3} \Rightarrow x = \begin{cases} \pi/3 \\ 4\pi/3 \end{cases}$$

$$\cot anx = -1 \Rightarrow \tan x = -1 \Rightarrow x = \begin{cases} 3\pi/4 \\ 7\pi/4 \end{cases}$$

$$\sec x = 1 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow x = 0$$

De resolució de triangles i propietats de les funcions

28. Calcula geomètricament (sense calculadora) les raons trigonomètriques de l'angle de 45º

En un triangle rectangle isòsceles els angles iguals són de 45º i els catets són iguals. La hipotenusa és, en funció del catet c

$$h = \sqrt{c^2 + c^2} = \sqrt{2c^2} = c\sqrt{2}$$

el sinus i el cosinus de 45 són

$$\sin 45 = \cos 45 = \frac{c}{c\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

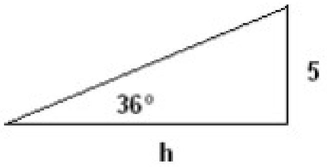
i la tangent

$$\tan 45 = \frac{c}{c} = 1$$

D'aplicacions dels teoremes del sinus i el cosinus

9 Busca l'àrea d'un pentàgon regular de costat 10 cm

Un angle central del pentàgon és de $\frac{360}{5} = 72°$



L'altura d'un dels cinc triangles és

$\tan 36° = \frac{5}{h} \Rightarrow h = \frac{5}{\tan 36°} = 6{,}88\ cm$

i l'àrea del pentàgon

$A = 5\frac{10 \cdot 6{,}88}{2} = 172\ cm^2$

Tenen un total de 25 pàgines

El tercer apartat és de probabilitat

Probabilitat

Probabilitat 1
Distribució Binomial
Combinatòria
Distribució Normal
Estadística 1
Estadística 2
Probabilitat 2
Probabilitat 3
Probabilitat 4

Amb 9 temes. Conté exercicis resols de càlcul de probabilitats de diferents nivells. En tot aquest apartat hi ha unes 54 pàgines.

8 Calcula la probabilitat que en llançar un dau la suma dels punts de les cares visibles sigui més gran que 18

Hi ha 6 casos i en cada un hi ha 5 cares visibles i una que no ho és. Si la cara no visible és 1, la resta 2+3+4+5+6=20, si la cara no visible és 2, la suma de les altres que són visibles és 1+3+4+5+6=19 i si la cara no visible és 3, les visibles ja no superen la suma de 18 ja que 1+2+4+5+6=18

Aleshores la probabilitat demanada és $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

10. Un examen consta de nou preguntes de quatre possibles respostes cada una, de les quals només una és correcta. Si suposem que un estudiant que fa l'examen respon les preguntes a l'atzar, quina és la probabilitat que contesti correctament sis preguntes? i que no n'encerti cap?

La probabilitat d'encertar, a l'atzar, una pregunta és 0,25 donat que hi ha quatre opcions en cada una. La probabilitat que l'alumne contesti correctament sis de les nou preguntes és

$$P(k=6)=\binom{9}{6}0{,}25^{6}0{,}75^{3}=0{,}00865$$

La probabilitat de no encertar-ne cap

$$P(k=0)=\binom{9}{0}0{,}75^{9}=0{,}07508$$

De distribució BinomialCombinatòria

9. De quantes maneres es poden col·locar deu cantaires d'un cor si dos d'ells han d'estar sempre en els extrems?

Fixem els dos dels extrems, que poden estar de 2 maneres diferents. La resta són 8

$$2\cdot P_8=2\cdot 8!=2\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2=80640$$

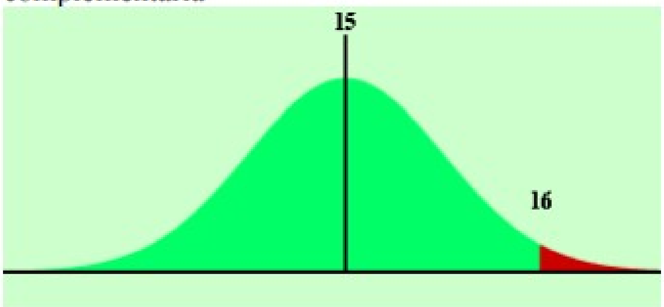
Distribució Normal

1. La durada mitjana d'un rentavaixelles és de 15 anys amb una desviació típica igual a 0,5 anys. Si la vida útil de l'electrodomèstic es distribueix normalment, calcula la probabilitat que el rentavaixelles duri més de 16 anys

Calculem el valor tipificat z que correspon a x=16

$$Z=\frac{x-\bar{x}}{\sigma}=\frac{16-15}{0{,}5}=2$$

i llegim el valor que correspon en una taula N(0,1) és 0,97725. Volem la complementària



$$P(x\geq 16)=0{,}02275$$

I Estadística.

11. Omple els buits de la taula següent sabent que la mitjana aritmètica és $\bar{x} = 19{,}3$, que la mediana és 16 i la moda és 9

x	3			21	32		38
f	3	5	2	2	4	3	1

Si la moda és 9, aquest és el valor que té la freqüència major, que correspon a la dada de freqüència 5

Si la mediana és 16 i com que tenim 20 dades, ha de correspondre a la mitjana de les posicions 10 i 11. La posició 10 és desconeguda, però la posició 11 és 21, aleshores

$$16 = \frac{m+21}{2} \quad \Rightarrow m = 11$$

i la dada que té freqüència 2 és 11

Per últim calculem la dada que té freqüència 3, els elements coneguts són ara

x	3	*9*	*11*	21	32	x	38
f	3	5	2	2	4	3	1

$$19{,}3 = \bar{x} = \frac{9+45+22+42+128+3x+38}{20} \quad \Rightarrow x = 34$$

Sistemes **Sistemes 1**

Sistemes 2

Determinants

Matrius 1

Matrius 2

Determinants 2

Exercicis de sistemes d'equacions lineals, resols fent servir el mètode de Gaus

o $\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + 3z = 15 \\ 3x + y = 12 \end{cases}$

$$\begin{cases} x-y+z=3 \\ 2x+3z=15 \\ 3x+y=12 \end{cases}$$

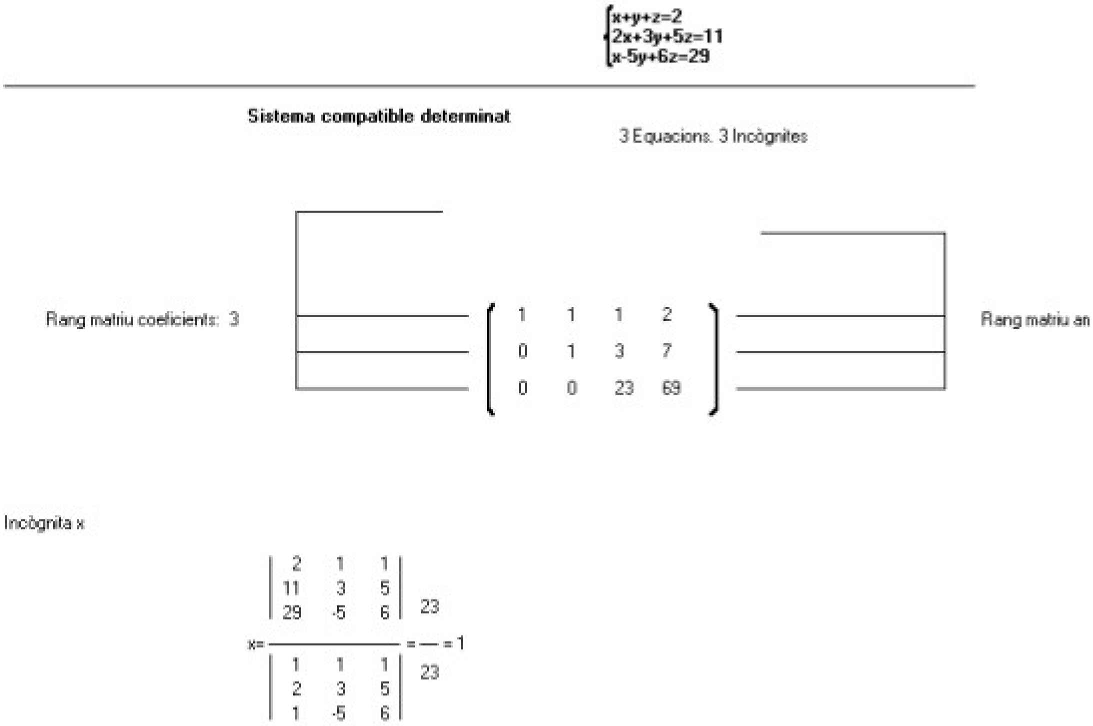
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 15 \\ 3 & 1 & 0 & 12 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} [1] \\ 1[2]-2[1] \\ 1[3]-3[1] \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 4 & -3 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} [1] \\ [2] \\ 2[3]-4[2] \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & -10 & -30 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} -10[1]-1[3] \\ -10[2]-1[3] \\ [3] \end{matrix}$$

determinats

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+3y+5z=11 \\ x-5y+6z=29 \end{cases}$$



L’apartat Sistemes 2 és semblant i té exercicis com ara

2.- $\begin{cases} x=y+7 \\ 3y+3=x \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 18 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix}$$

L’apartat Exercicis 2

El següent apartat és sobre determinants

8. Demostra, sense desenvolupar, que aquest determinant val zero

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$$

Sumem a la tercera columna la segona i obtenim $\begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & a+b+c \\ 1 & c & a+b+c \end{vmatrix}$, la tercera columna té dues columnes proporcionals, la primera i la tercera, aleshores el seu valor és zero

Segueixen dos apartats sobre matrius: Matrius 1 i Matrius 2. Tenen exercicis resols com ara

i **8. Resol aquesta equació matricial**

9. Calcula les potències n-èssimes de la matriu $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

Calculem les primeres potències i intentem deduir una llei general

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2 \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2 \\ 0 & a^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^4 & 4a^3 \\ 0 & a^4 \end{pmatrix}$$

i, en general

$$A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$$

El darrer apartat és una col·lecció d'exercicis de matrius i determinants com ara:

9. Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ **i** $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$**, trobeu una matriu X que verifiqui** $A \cdot X = B$**. Calculeu** B^{100}

Calculem la matriu inversa de A

$$A^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Aleshores la matriu X és

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = B^2 B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

i, en general,

$$B^{100} = \begin{pmatrix} 2^{99} & 2^{99} \\ 2^{99} & 2^{99} \end{pmatrix}$$

Còniques **Còniques 1**
Còniques 2
Còniques 3
Còniques 4

Còniques 1 són bàsicament exercicis sobre circumferències i les seves propietats

16 Busca el valor de k per tal que la recta $3x+y+k=0$ sigui tangent a la circumferència d'equació $x^2+y^2-6x=0$. Hi ha més d'una solució?. Raona la resposta.

La recta és tangent quan només té un punt en comú. Resolem el sistema format per la recta i la circumferència demanant que la solució sigui única
Aïllem y a la recta $y=-3x-k$
l'equació serà $x^2+(-3x-k)^2-6x=0$ si desenvolupem
$10x^2+(6k-6)x+k^2=0$
El discriminant ha de ser zero. Podem plantejar
$\Delta=(6k-6)^2-4\cdot 10k^2=0$
$-k^2-18k+9=0$
Les solucions són
$k=-9\pm 3\sqrt{10}$
Són dues rectes paral·leles

Còniques 2 tracta d'el·lipses i hipèrboles

Busca els semieixos, la semidistància focal i l'excentricitat de l'el·lipse d'equació $x^2+y^2=9$ i $16x^2+9y^2=144$

Dividim per 9 la primera equació i obtenim

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{9}=1 \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=3 \end{cases}$$

aleshores $c^2=a^2-b^2=0$
els semieixos són 3 i la semidistància focal 0. És una circumferència

Dividim per 144 la segona equació i obtenim

$$\frac{16x^2}{144}+\frac{9y^2}{144}=1 \quad \Rightarrow \begin{cases} a^2=\dfrac{144}{16} \\ b^2=\dfrac{144}{9} \end{cases}$$

els valors dels semieixos són $a=\frac{12}{4}=3$ i $b=\frac{12}{3}=4$. Com que a<b és una el·lipse vertical. La semidistància focal és $\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$. L'excentricitat $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{7}}{3}$

Còniques 3 i Còniques 4 són un recull d'exercicis diversos

31. Busca l'equació de la paràbola que té com a directriu la recta y+5=0 i com a focus els punt P(0,5)

La recta directiu és y=-5, una recta horitzontal, si el focus està sobre l'eix 0Y, el vèrtex és l'origen de coordenades (0,0) i el paràmetre de la paràbola és p=10. L'equació és
$x^2=2py \quad \Rightarrow x^2=20y$

5. Calculeu l'equació d'una circumferència de centre (-4,2) i que sigui tangent a la recta $3x+4y-16=0$

La distància del centre a la recta dóna el radi de la circumferència

$$d((-4,2);3x+4y-16=0)=\frac{|-12+8-16|}{\sqrt{3^3+4^2}}=\frac{20}{5}=4$$

Si el radi és 4, l'equació és

$$(x+4)^2+(y-2)^2=16$$

$$x^2+y^2+8x-4y=-4$$

Exercicis 2

Passem ara al segon apartat superior, de nom general Exercicis 2. Quan el despleguem veiem

Els apartats de Funcions - Derivades – Integrals – Geometria – Altres
Si obrim Funcions tenim

Funcions	**Funcions 1**
	Funcions 2

Funcions 3
Anàlisi funcions 1
Anàlisi funcions 2

A Funcions 1 exercicis de planteig de funcions

3 En un triangle la suma de les longituds de la base i l'altura és 15 cm. Expressa l'àrea del triangle en funció de la longitud de la base. Troba el domini d'aquesta funció

Si la base és x, l'altura és 15-x. L'àrea del triangle

$$A(x)=\frac{x(15-x)}{2}=-\frac{1}{2}x^2+\frac{15}{2}x$$

x pot ser un nombre major de zero i menor de 15. El domini de la funció és (0,15)

Funcions 2 tracta de límits i continuïtat de funcions

Calculeu els límits $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$; $\lim\left(\frac{n+2}{n}\right)^{n}$

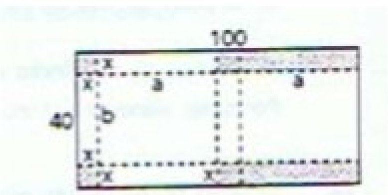
Els dos són límits que presenten l'aspecte 1^{∞}

$$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}=\lim\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{2}=e^{2}$$

$$\lim\left(\frac{n+2}{n}\right)^{n}=\lim\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n}=[n=2t]=\lim\left(1+\frac{2}{2t}\right)^{2t}=\lim\left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right)^{2}=e^{2}$$

Funcions 3 de planteig i anàlisi de funcions

6. Disposem d'una cartolina de 100 per 40 cm i volem construir una caixa amb tapa tallant un quadrat en dos dels angles i dos rectangles en els altres dos angles. Busca l'expressió del volum en funció del costat x del quadrat

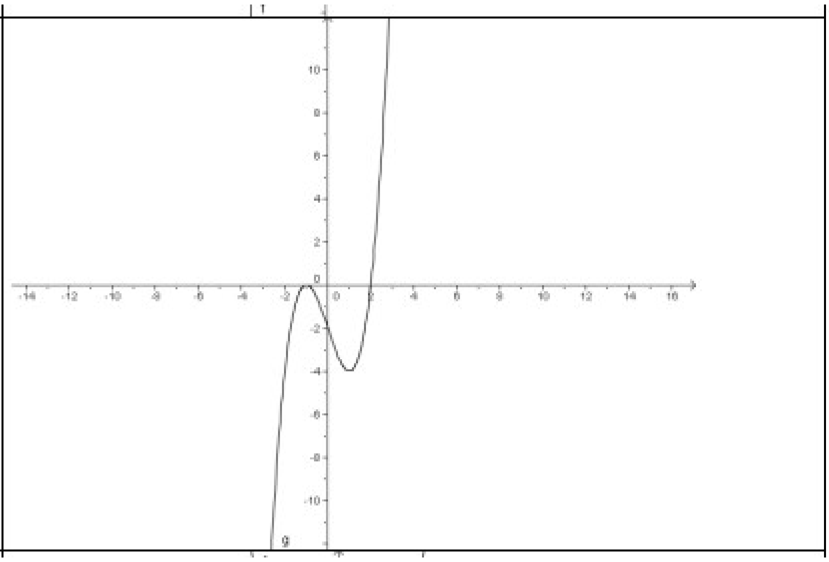


El volum de la capsa serà $V=abx$

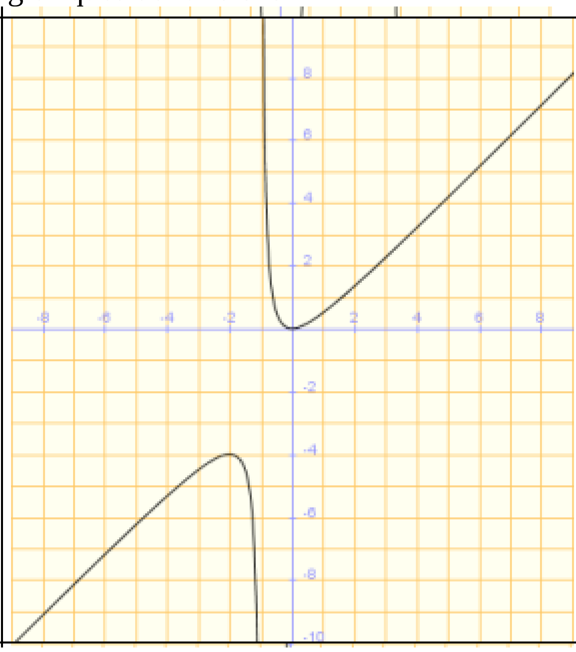
i les distàncies a i b son $b=40-2x$; $a=\frac{100-2x}{2}=50-x$

aleshores el volum $v=(50-x)(40-2x)x$

Anàlisi de funcions 1 són gràfiques de funcions com ara i

$f(x)=(x+1)^2(x-2)$	

anàlisi de funcions 2 també són gràfiques de funcions

$f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$	

Derivades **Derivades 1**
Derivades 2
Derivades 3
Derivades 4
Derivades 5
Màxims i mínims 1
Màxims i mínims 2

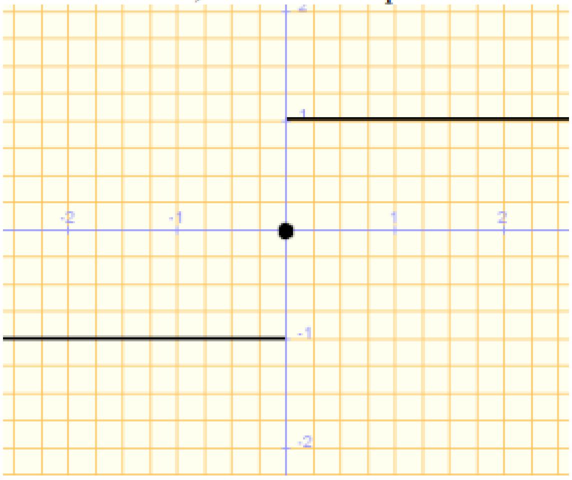
D
erivades 1, Derivades 2, Derivades 3 , Derivades 4 i Derivades 5 són exercicis de càlcul de derivades i aplicacions de les derivades a l'anàlisi de funcions, en particular al creixement i decreixement i al càlcul de rectes tangents en un punt
Alguns dels exercicis que es poden trobar són

4. Indica en quins punts és derivable la funció

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{|x|} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

Primer hem de veure si és contínua en el punt x=0

Quan x és positiu $\frac{x}{|x|}=\frac{x}{x}=1$, i quan x és negatiu $\frac{x}{|x|}=\frac{x}{-x}=-1$, d'on la funció no és contínua a x=0, aleshores tampoc és derivable en aquest punt



1 Aplicant la definició, calcula la derivada de cadascuna de les funcions següents en $x=-3$

$f(x)=-x^2+1$	$f(x)=\sqrt{1-x}$	$f(x)=\dfrac{1}{x}$

$$f'(-3)=\lim_{h\to 0}\frac{-(-3+h)^2+1-(-8)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-9+6h-h^2+1+8}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(6-h)}{h}=\lim_{h\to 0}(6-h)=6$$

$$f'(-3)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1-(-3+h)}-\sqrt{1-(-3)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{4-h}-2}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{4-h}-2)(\sqrt{4-h}+2)}{h(\sqrt{4-h}+2)}=\lim_{h\to 0}\frac{4-h-4}{h(\sqrt{4-h}+2)}=-\frac{1}{4}$$

$$f'(-3)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{-3+h}-\frac{1}{-3}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{3-3+h}{3(-3+h)}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h}{3h(-3+h)}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{3(-3+h)}=-\frac{1}{9}$$

5. Calcula la derivada de la funció $f(x)=\sqrt{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$

$$f(x)=\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}=\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{a(cx+d)-c(ax+b)}{(cx+d)^2}\right)=\frac{ad-cb}{2(cx+d)^2\sqrt{\dfrac{ax+b}{cx+d}}}$$

7. Determina el paràmetre c perquè el mínim de la funció $f(x)=x^2+2x+c$ **sigui ig...**

C
f
L ... s
p ... 3,
al
8

1 - $y=\sin 2x$ $\qquad y' = 2\cos 2x$

2 - $y=\sin\frac{x}{5}$ $\qquad y'=\frac{1}{5}\cos\frac{x}{5}$

3 - $y=\frac{\sin 5x}{2}$ $\qquad y'=\frac{1}{2}\cdot 5\cos 5x=\frac{5\cos 5x}{2}$

4 - $y=\sin x^2$ $\qquad y'=2x\cos x^2$

5 - $y=\sin^2 x$ $\qquad y'=2\sin x\cdot\cos x$

6 - $y=\sin(3x^5)$ $\qquad y'=15x^4\cos(3x^5)$

7 - $y=(\sin x)^3$ $\qquad y'=3(\sin x)^2\cos x$

Màxims i mínims 1 i Màxims i mínims 2 són exercicis de planteig i càlcul de problemes de màxims i mínims

1. Calcula dos nombres que sumin 7 de manera que sigui màxim el seu producte

Siguin els nombre x i 7-x. La funció que dóna el producte és
$f(x)=x(7-x)=7x-x^2$
Demanem un màxim, la derivada ha de ser zero
$f'=7-2x=0\Rightarrow x=\frac{7}{2}=3{,}5$
Si estudiem el creixement i decreixement de la funció veiem que és, en efecte, un màxim. Si calculem la segona derivada el valor és
$f''=-2<0$
negatiu, és, en efecte, un màxim

34. En una oficina de correus només admeten paquets amb forma de paral·lelepípede rectangular, de manera que l'amplada i l'altura siguin iguals i, a més, la suma de l'amplada, l'altura i la llargada sigui de 72 cm. Busca les dimensions del paral·lelepípede perquè el volum sigui màxim.

Si x és l'amplada, també x ha de ser l'altura, i la llargada 72-2x

Aleshores el volum és

$V = x \cdot x \cdot (72-2x) = 72x^2 - 2x^3$

La derivada $V' = 144x - 6x^2$

Les solucions de la derivada igualada a zero són $x = 0$ i $x = 24$

La segona derivada és $V'' = 144 - 12x$, de signe negatiu si x=24. Aquesta solució correspon a un màxim. Les dimensions són 24 cm cada aresta. Correspon a un cub

Integrals

Integrals 1
Integrals 2
Àrees 1
Àrees 2
Àrees 3

L'apartat Integrals 1 conté exercicis de càlcul d'integrals indefinides del tipus

1. $\int \frac{dx}{(x-1)^2}$

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2} = \begin{bmatrix} x-1=t \\ dx = dt \end{bmatrix} = \int t^{-2} dt = \frac{1}{-1} t^{-1} = -\frac{1}{(x-1)}$$

2. $\int \frac{5x}{\sqrt{1+x^2}} dx$

$$\int \frac{5x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \begin{bmatrix} 1+x^2 = t \\ 2xdx = dt \end{bmatrix} = \frac{5}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{5}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{5}{2} \frac{1}{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}} = 5\sqrt{t} = 5\sqrt{1+x^2}$$

3. $\int x\sqrt{1+x^2} dx$

$$\int x\sqrt{1+x^2} dx = \begin{bmatrix} 1+x^2 = t \\ 2xdx = dt \end{bmatrix} = \int \frac{\sqrt{t} dt}{2} = \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{3}{2}} t^{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{t^3}}{3} = \frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3}$$

L'apartat Integrals 2 es semblant

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx$$

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx = \begin{bmatrix} t = 1+x^2 \\ dt = 2xdx \end{bmatrix} = \int \sqrt{t}\,dt = \frac{1}{\frac{3}{2}} t^{\frac{3}{2}} = \frac{2\sqrt[3]{t^2}}{3} = \frac{2\sqrt[3]{1+x^2}}{3}$$

$$\int - sinx\cos^2 xdx$$

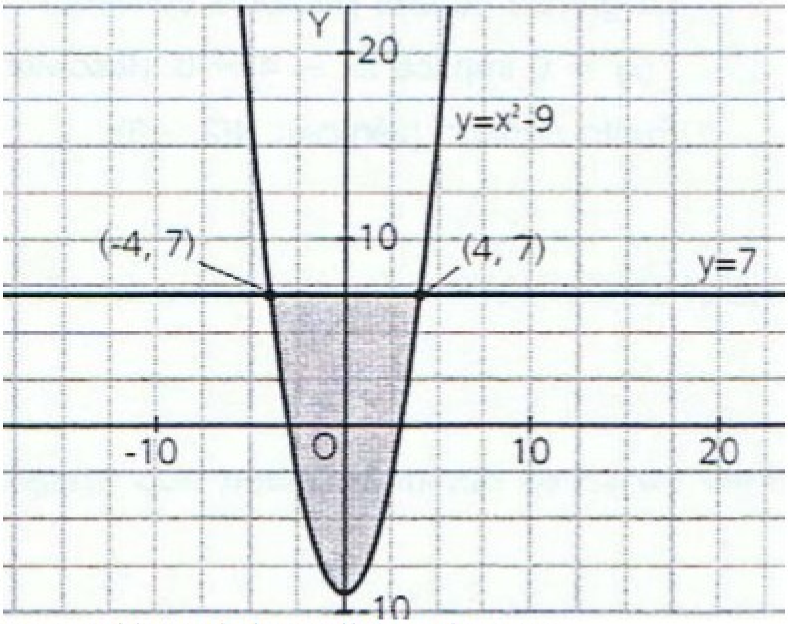
$$\int - sinx\cos^2 xdx = \begin{bmatrix} t = \cos x \\ dt = -sinxdx \end{bmatrix} = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} = \frac{\cos^3 x}{3}$$

$$\int \frac{arc \quad tan \quad x}{1 + x^2} dx$$

$$\int \frac{arc\ tan\ x}{1+x^2} dx = \begin{bmatrix} t = arc\ tan\ x \\ dt = \dfrac{1}{1+x^2} dx \end{bmatrix} = \int tdx = \frac{t^2}{2} = \frac{arc\ tan^2 x}{2}$$

Àrees 1 són càlculs d'àrees fent servir integrals definides

5. Calcular l'àrea del recinte limitat per les gràfiques de $f(x) = x^2 - 9$ i $f(x) = 7$



La recta i la paràbola es tallen en els punts

$x^2 - 9 = 7 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$

I la paràbola té, en aquest interval, imatges menors que la recta. Plantegem

$$\int_{-4}^{4}\left(7-(x^2-9)\right)dx = \int_{-4}^{4}(16-x^2)dx = 2\int_{0}^{4}(16-x^2)dx = 2\left[16x - \frac{x^3}{3}\right]_0^4 = \frac{256}{3}$$

Àrees 2 i Àrees 3 també contenen exercicis de càlcul d'àrees. Alguns amb representació de les funcions que les defineixen

2. Calcula $\int_0^{\pi} \cos x dx$ **i l'àrea sota la corba de la funció f(x)=cos x en l'interval [0,π]**

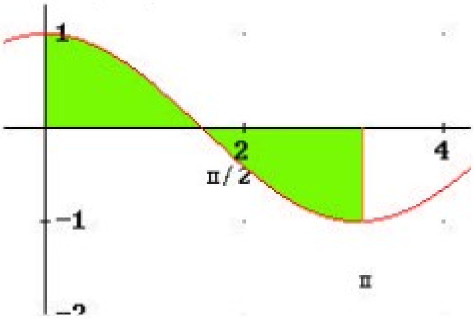
La funció cos x és positiva en $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ i negativa en $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$. La integral definida és

$$\int_0^{\pi} \cos x dx = \sin x\Big]_0^{\pi} = \sin(\pi) - \sin 0 = 0$$

Però l'àrea demanada serà

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x dx\right| = \sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left|\sin x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right| = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin 0 + \left|\sin \pi - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| =$$

$$1 - 0 + |0 - 1| = 2$$



Geometria **Geometria del pla**
Rectes al pla
Mètriques al pla
Geometria espai
Vectors espai
Rectes i plans
Posició relativa 1
Posició relativa 2

L'apartat de Geometria del pla són exercicis, bàsicament de vectors, com ara

1. Busca x i y perquè es compleixin les igualtats següents

$3(x,2y) = (-1,5)$ $\qquad\qquad$ $-2(-1,y) = 6(x,x-y)$

La primera és la igualtat $\begin{cases} 3x = -1 \\ 6y = 5 \end{cases}$ que té de solucions $x = -\frac{1}{3},\ y = \frac{5}{6}$.

La segona dóna el sistema $\begin{cases} 2 = 6x \\ -2y = 6x - 6y \end{cases}$

Les solucions d'aquest sistema són $x = \frac{1}{3}, \quad y = \frac{1}{2}$

Rectes en el pla

5 Busca totes les equacions possibles de la recta r que passa pel punt A(3,5) i porta la direcció del vector v=(2,-4)

L'equació vectorial és

$(x, y) = (3,5) + k(2,-4)$

l'equació paramètrica

$$\begin{cases} x = 3 + 2k \\ y = 5 - 4k \end{cases}$$

la contínua

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-5}{-4}$$

que podem simplificar a $x - 3 = \dfrac{y-5}{-2}$

L'equació general serà

$-2x + 6 = y - 5 \quad \Rightarrow -2x - y + 11 = 0 \quad \Rightarrow 2x + y - 11 = 0$

i l'equació explícita

$y = -2x + 11$

Mètriques en el pla són càlculs de distàncies i angles

5 Busca totes les equacions possibles de la recta r que passa pel punt A(3,5) i porta la direcció del vector v=(2,-4)

L'equació vectorial és

$(x, y) = (3,5) + k(2,-4)$

l'equació paramètrica

$$\begin{cases} x = 3 + 2k \\ y = 5 - 4k \end{cases}$$

la contínua

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-5}{-4}$$

que podem simplificar a $x - 3 = \dfrac{y-5}{-2}$

L'equació general serà

$-2x + 6 = y - 5 \quad \Rightarrow -2x - y + 11 = 0 \quad \Rightarrow 2x + y - 11 = 0$

i l'equació explícita

$y = -2x + 11$

Primers exercicis de geometria a l'espia en l'apartat de Geometria espai i vectors a Vectors espai

5 Busca totes les equacions possibles de la recta r que passa pel punt A(3,5) i porta la direcció del vector v=(2,-4)

L'equació vectorial és

$(x, y) = (3,5) + k(2,-4)$

l'equació paramètrica

$\begin{cases} x = 3 + 2k \\ y = 5 - 4k \end{cases}$

la contínua

$\frac{x-3}{2} = \frac{y-5}{-4}$

que podem simplificar a $x - 3 = \frac{y-5}{-2}$

L'equació general serà

$-2x + 6 = y - 5 \quad \Rightarrow -2x - y + 11 = 0 \quad \Rightarrow 2x + y - 11 = 0$

i l'equació explícita

$y = -2x + 11$

Equacions de rectes i plans a l'espai a l'apartat Restes i plans

6. Donats els punts P=(1,2,3) Q=(1,1,1) i R=(2,0,4) busca les equacions paramètriques de la recta que passa pel punt P i és perpendicular al pla que passa pels tres punts

L'equació general del pla és

$$\begin{vmatrix} x-1 & 0 & 1 \\ y-2 & -1 & -2 \\ z-3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

on els vectors directors del pla són $\overrightarrow{PQ}$ i $\overrightarrow{PR}$

Desenvolupant el determinant obtenim l'equació

$5x + 2y - z - 6 = 0$

El vector perpendicular a aquest pla és (5,2,-1) i ha de ser el vector director de la recta que ens demanen. Si ha de passar per P=(1,2,3) les equacions paramètriques són

$(x, y, z) = (1,2,3) + \lambda\ (5,2,-1)$

$\begin{cases} x = 1 + 5\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases}$

Els últims apartats: Posició relativa 1 i Posició relativa 2 tracten de l'anàlisi de les posicions de rectes i plans a l'espai. Són exercicis com ara:

6. Sigui r la recta d'equació

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x+y-2z=0 \end{cases}$$

troba l'equació cartesiana del pla que conté la recta r i és perpendicular al pla y=0

El feix de plans que contenen r és

$$\lambda\,(x+y-z)+\mu\,(2x+y-2z)=0 \quad \Rightarrow (\lambda+2\mu)x+(-\lambda+\mu)y+(\lambda-2\mu)z=0$$

el pla y=0 té de vector perpendicular (0,1,0). El producte escalar d'aquest vector pel vector normal al pla del feix ha de ser zero

$$(\lambda+2\mu\,,-\lambda+\mu\,,-2\mu)\bullet(0{,}1{,}0)=-\lambda+\mu=0$$

d'on $\lambda=\mu$ i el pla és

$$\lambda\,(x+y-z)+\lambda\,(2x+y-2z)=0 \quad \Rightarrow \lambda\,(3x-z)=0 \Rightarrow 3x-z=0$$

Una segona manera de fer aquest exercici és buscar dos punts de la recta r resolent el sistema

$$r:\begin{cases} x-y=-z \\ 2x+y=2z \end{cases}$$

calculem x i y en funció de z

$$x=\frac{1}{3}\begin{vmatrix} -z & -1 \\ 2z & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{3}z \quad ; \quad y=\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & -z \\ 2 & 2z \end{vmatrix}=\frac{4}{3}z$$

fent z=0 i z=3 obtenim dos punts de r A=(0,0,0) i B=(1,4,3). El pla buscat passa per (0,0,0) i té de vectors director (1,4,3) ja que conté la recta i (0,1,0) ja que és perpendicular al pla y=0. La seva equació és

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 4 & 1 \\ z & 3 & 0 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow z-3x=0$$

Altres **Nombres complexos**
Logaritmes
Exponencials
Programació lineal

Nombres complexos

1 Resol les equacions següents en el conjunt dels nombres complexos

$$x^2+2x+2=0$$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{4-8}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{-4}}{2}=\frac{-2\pm 2i}{2}=\begin{cases} -1+i \\ -1-i \end{cases}$$

$$x^2-3x+6=0$$

$$x=\frac{3\pm\sqrt{9-24}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{-15}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{15}i}{2}=\begin{cases} \dfrac{3+\sqrt{15}i}{2} \\ \dfrac{3-\sqrt{15}i}{2} \end{cases}$$

$$x^2+25=0$$

$$x^2=-25 \Rightarrow x=\sqrt{-25}=\sqrt{25}i=\begin{cases} 5i \\ -5i \end{cases}$$

L'apartat de Logaritmes són apunts elementals sobre les propietats dels logaritmes. De fet és l'unic capítol que no conté exercicis resols

1 Resol les equacions següents en el conjunt dels nombres complexos

$$x^2+2x+2=0$$
$$x=\frac{-2\pm\sqrt{4-8}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{-4}}{2}=\frac{-2\pm 2i}{2}=\begin{cases}-1+i\\-1-i\end{cases}$$
$$x^2-3x+6=0$$
$$x=\frac{3\pm\sqrt{9-24}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{-15}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{15}i}{2}=\begin{cases}\dfrac{3+\sqrt{15}i}{2}\\\dfrac{3-\sqrt{15}i}{2}\end{cases}$$
$$x^2+25=0$$
$$x^2=-25\Rightarrow x=\sqrt{-25}=\sqrt{25}i=\begin{cases}5i\\-5i\end{cases}$$

Seguim amb exercicis de funcions exponencial i logarítmiques amb algunes aplicacions. És l’apartat d’Exponencials

1 Resol les equacions següents en el conjunt dels nombres complexos

$$x^2+2x+2=0$$
$$x=\frac{-2\pm\sqrt{4-8}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{-4}}{2}=\frac{-2\pm 2i}{2}=\begin{cases}-1+i\\-1-i\end{cases}$$
$$x^2-3x+6=0$$
$$x=\frac{3\pm\sqrt{9-24}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{-15}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{15}i}{2}=\begin{cases}\dfrac{3+\sqrt{15}i}{2}\\\dfrac{3-\sqrt{15}i}{2}\end{cases}$$
$$x^2+25=0$$
$$x^2=-25\Rightarrow x=\sqrt{-25}=\sqrt{25}i=\begin{cases}5i\\-5i\end{cases}$$

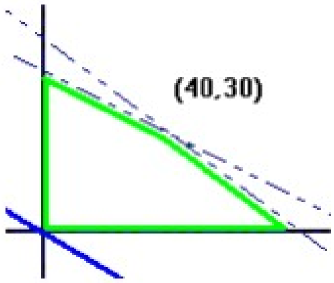
A Programació lineal trobem exemples de càlcul d’optimitzacions lineals

6. En un magatzem hi ha 100 caixes del tipus A i 100 del tipus B. La taula informa del pes, el volum i el valor de cadascuna

tipus	pes (kg)	volum (dm^3)	valor (€)
A	100	30	75
B	200	40	125

Una camioneta pot carregar 1000 kg i un volum màxim de 2400 dm^3. Troba com ha de carregar-la per fer que el valor de les caixes sigui el més gran possible.

La funció que s'ha de maximitzar és el valor de les caixes que transporta la camioneta. És la funció $z=75x+125y$. Si el pes no ha de superar 10.000 kg podem formar la inequació $100x+200y<10.000$, i si el volum no ha de superar 2.400 dm^3 escrivim la inequació $30x+40y<2400$. La regió factible és:



I el valor màxim és 6810 € si es carreguen 40 caixes del primer tipus i 30 del segon

El total de pàgines i d'exercicis resols que podeu trobar en aquest dos primers apartats ve indicada en aquesta taula

			pàgines	exercicis
Exercicis 1	Equacions	Equacions	7	18
		Planteig 1	2	18
		Planteig2	4	9
	Trigonometria	Trigonometria 1	5	14
		Funcions	4	6
		Trigonometria 2	7	17
		Trigonometria 3	9	18
	Probabilitat	Probabilitat 1	8	20
		Distribució Binomial	4	12
		Combinatòria	4	23
		Distribució Normal	7	14
		Estadística 1	5	10
		Estadística 2	3	4
		Probabilitat 2	5	17
		Probabilitat 3	9	22
		Probabilitat 4	9	13
	Sistemes	Sistemes 1	38	38
		Sistemes 2	5	5
		Determinants 1	4	10
		Matrius 1	4	8
		Matrius 2	7	17
		Determinants 2	4	12
	Còniques	Còniques 1	12	25
		Còniques 2	3	7
		Còniques 3	4	13
		Còniques 4	7	19
Exercicis 2	Funcions	Funcions 1	7	18
		Funcions 2	4	15
		Funcions 3	6	16
		Anàlisi de funcions 1	8	21
		Anàlisi de funcions 2	5	14
	Derivades	Derivades 1	12	25
		Derivades 2	4	11
		Derivades 3	3	12
		Derivades 4	5	14
		Derivades 5	5	6
		Màxims i mínims 1	8	14
		Màxims i mínims 2	12	21
	Integrals	Integrals 1	3	20
		Integrals 2	17	120
		Àrees 1	10	16
		Àrees 2	9	14
		Àrees 3	9	20
	Geometria	Geometria del pla	3	9
		Rectes del pla	5	15
		Mètriques del pla	9	22
		Geometria de l'espai	16	40
		Vectors espai	6	15
		Rectes i plans	9	20
		Posició relativa 1	15	48
		Posició relativa 2	10	23
	Altres	Nombres complexos	4	15
		Logaritmes	3	
		Exponencials	9	15
		Programació lineal	12	16